Квант

1975
5

Научно-популярный физико-математический журнал

На этом рисунке, взятом из изданной в 1504 году книги «Margarita philosophica» Георга Рейша, вы видите состязание между «абакистом» и «алгористом». О том, кто такие «абакисты» и «алгористы», вы можете узнать из статьи «Про счеты».

Основан в 1970 году.

Квант

1975
5

Научно-популярный физико математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

2 Великий подвиг советского народа
5 *Ю В Матиясевич* Формулы для простых чисел
14 *А В Чаплик* Волновая механика
22 *С Г Веров* Касательные к рулеттам
31 *И Н Бронштеин* Общие свойства конических сечений

Лаборатория «Кванта»

41 *М П Головей* Опыты со струей воды

Математический кружок

45 *И Ф Шарыгин* Выход в пространство

Задачник «Кванта»

50 Задачи М321—М325, Ф333—Ф337
52 Решения задач М286—М290, Ф296—Ф298

Практикум абитуриента

58 *К И Кашин* Институт начинается со школы
60 *Г И Розенблат* Как приступить к решению задачи по физике?
64 *Ж М Михаилов, В Н Сдудскин, А В Устинова* Московский государственный университет им М В Ломоносова

Информация

68 *А Л Стасенко* ФАЛТ — что это такое?
70 *А А Быков Ю И Ионин* Школа интернат при Ленинградском государственном университете им А А Жданова

«Квант» для младших школьников

71 Задачи
72 *О И Чопенко* Про счеты

Ответы, указания, решения

Уголок коллекционера

76 *А В Алтыкис* XXX лет победы над гитлеровским фашизмом (*3 я с обложки*)

30 ЛЕТ ПОБЕДЫ

Великий подвиг советского народа

9 мая советские люди и вместе с ними все прогрессивное человечество празднуют тридцатилетие победы над гитлеровской Германией. Эту великую победу одержали не только советские вооруженные силы, сражаясь на передовой, но и весь советский народ под руководством Коммунистической партии Советского Союза.

Не остались в стороне и советские ученые, плоть от плоти народа. Они внесли весомый вклад в победу, сражаясь на фронтах и работая в научных лабораториях.

Незабываем митинг в Коммунистической аудитории Московского государственного университета на Моховой, когда университетская комсомольская организация объявила себя мобилизованной «для выполнения любого задания партии и правительства — на фронте, на заводах, на транспорте, на колхозных и совхозных полях». Фронтовики-ученые самоотверженно сражались с врагом; все помыслы их были направлены на победу. Но и тогда, в дни горячих боев, они оставались верными науке. Одному из них писал в марте 1945 года замечательный советский математик и педагог А. Я. Хинчин:

«...Вы заставили меня задуматься над тем, почему в эту войну такие, совсем юные бойцы, как Вы, при каждой небольшой передышке со всей страстью рвутся к своему любимому делу — к тому делу, которому они отдали себя еще до войны и от которого были оторваны войной. В прошлую мировую войну этого не было. Тогда юноша, попавший на фронт, почти всегда чувствовал, что жизнь его переломилась, что все, чем он жил прежде, стало для него невозможной сказкой. А сейчас ведь есть такие, которые в перерывах между боями пишут диссертации и защищают их, приехав в короткий отпуск! Не потому ли это, что Вы ощущаете всем существом Ваш ратный труд и Ваше любимое занятие — науку, искусство, практическую деятельность — как два звена одного и того же великого дела? И если это так, то не есть ли это ощущение одна из главных движущих пружин Ваших побед, которыми мы здесь, в тылу, так восхищаемся?..»

Не все дожили до дня великой победы. Немало ученых отдали свою жизнь за независимость нашей Родины. Мы с благоговением произносим их имена.

Герой Советского Союза Евгения Максимовна Руднева — выпускница механико-математического факультета МГУ. Перед войной она заведовала отделом Всесоюзного астрономо-геодезического общества. Гвардии старший лейтенант, штурман гвардейского авиационного полка, она совершила 645 боевых вылетов. Дневники и письма Евгении Максимовны Рудневой собраны в книге «Пока стучит сердце», выпущенной издательством «Молодая гвардия».

Тем, кто интересуется научно-популярной литературой, должны быть известны имена талантливых популяризаторов науки — Ростислава Николаевича Бончковского и Георгия Николаевича Бермана. Ростиславу Николаевичу принадлежит книга о первых математических олимпиадах для школьников, проводившихся у нас в стране. Он был основным редактором сборников «Математическое просвещение», издававшихся до войны. И все вы, конечно, читали замечательные научно-популярные книги Георгия Николаевича Бермана: «Циклоида», «Число и наука о нем» и другие. Тяжело раненый, он нашел в себе силы продолжать любимую работу и буквально за два дня до смерти правил корректуру своей книги.

В 1937—1941 годы одной из секций математического кружка для школьников при МГУ руководил молодой талантливый математик Давид Оскарович Шклярский. С первых дней войны ушел он на фронт и в 1944 году пал смертью храбрых. Но до сих пор ощущается влияние Д. О. Шклярского на математическое образование. С 1946 года выходит серия книг «Библиотека математического кружка», где используются материалы кружка, которым руководил Давид Оскарович. Он ни разу не держал в руках этих книг, но в знак признания его особых заслуг на первом месте среди авторов стоит фамилия Д. О. Шклярского.

Живы в памяти народа имена ученых, погибших в боях с фашистами. Вечная им память и слава!

Неоценим вклад ученых, которые, не жалея сил, работали днем и ночью, привнося в труд весь свой опыт, знания и талант, помогая вооруженным силам и оборонной промышленности. В том, что Советская Армия была оснащена современным оружием, большая заслуга наших ученых и конструкторов. Мы упомянем лишь о некоторых работах советских математиков и физиков.

«Богом войны» называют артиллерию. Наука помогала артиллерии более метко «накрывать» цель и сообщать снарядам разящую силу. Большую роль в выполнении этой задачи сыграли работы советских математиков, механиков, в частности, школы академика А. Н. Колмогорова по теории стрельбы, академика М. А. Лаврентьева по направленным взрывам, члена-корреспондента АН СССР А. А. Ильюшина по пластическому течению металлов.

Еще до войны группа специалистов Ленинградского физико-технического института, возглавляемого академиком А. Ф. Иоффе, начала разрабатывать актуальную для флота проблему — размагничивание кораблей. В то время на вооружение многих флотов мира были взяты так называемые магнитные мины, которые автоматически взрывались при прохождении корабля над ними. Дело в том, что всякое стальное тело (в данном случае корпус корабля) в большей или меньшей степени намагничено и тем самым создает вокруг себя магнитное поле. Это поле и «чувствовали» мины. Чтобы обезопасить корабль от магнитных мин, его нужно размагнитить. Размагничивание кораблей производилось системой определенным образом расположенных проводов, по которым пропускался электрический ток.

Во время войны работы по размагничиванию кораблей велись непосредственно на военно-морских базах. Эти работы проводились группой физиков под руководством академиков А. П. Александрова и И. В. Курчатова. Размагничивание оказалось настолько эффективным, что наш флот практически не нес потерь от магнитных мин. Благодаря этому была сохранена жизнь тысячам советских моряков.

Ученые занимались не только проблемами защиты от вражеских мин — велись работы и по созданию подрывных снарядов. Так, группой наших физиков были разработаны противотранспортные мины, на которых подрывались немецкие танки, поезда и автомобили. Немецкие миноискатели оказались бессильны в попытках обезвредить эти мины.

Ленинградским физикам, руководимым членом-корреспондентом АН СССР П. П. Кобеко, совместно с моряками военно-морского флота во время блокады Ленинграда пришлось решать не совсем обычную задачу: разработать методы, обеспечивающие безопасное прохождение транспорта по ледовой дороге. Как известно, в период блокады город снабжался продовольствием, сырьем и снарядами по единственной дороге, проходившей по льду Ладожского озера. В невероятно тяжелых условиях осажденного города, находящегося под обстрелом и бомбежкой, ученые-физики и моряки обеспечили бесперебойную работу «дороги жизни».

Эффективными оказались результаты труда уральских физиков, разработавших метод магнитной дефектоскопии, который позволил обнаруживать опасные изъяны в стальных корпусах артиллерийских снарядов. Метод основан на том, что у изделий, имеющих «внутренние» дефекты в металле, магнитное поле вблизи этих дефектов отличается от магнитного поля в «здоровых» частях изделия. Эти отклонения и удавалось обнаружить специальными приборами, получившими название магнитных дефектоскопов. Миллионы снарядов, забракованных по внешним механическим признакам, но в действительности вполне пригодных для стрельбы, с помощью этих приборов были признаны годными и возвращены на фронт.

Хорошо известна та исключительная роль, которую сыграли в войне радиолокаторы. Идея создания этого прибора принадлежит академику Ю. Б. Кобзареву.

Заслуги советских ученых получили высокую оценку партии и правительства: многим из них были присвоены звания Героя Советского Союза, Героя Социалистического Труда. Многие награждены орденами и медалями Советского Союза и других государств, удостоены государственных премий.

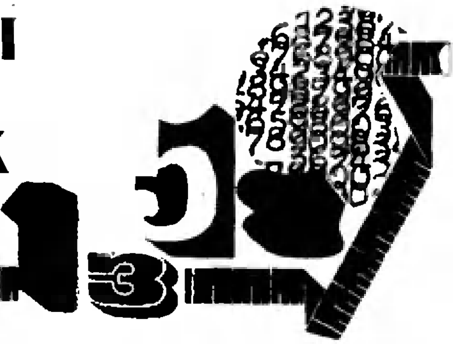
Задача овладения боевой техникой, в разработке которой активно участвуют советские ученые, теперь стала еще актуальней и сложней. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев отметил: «Военная техника в наши дни — это не обтянутые парусиной «фарманы» 20-х годов и даже не «ястребки» и «уточки» периода Отечественной войны. Сегодня защитники Советской родины должны владеть искусством управления межконтинентальными ракетами, вождения сверхзвуковых самолетов, атомных подводных лодок, быть знатоками многих других сложнейших видов оружия. Сегодня нужны уже не только просто смелые, тренированные, мускулистые ребята с метким глазом и твердой рукой, но и инженеры, математики, знакомые с тайнами электроники и кибернетики. Задачи, таким образом, и в этой области стали более сложными, ответственными, поднялись на новый уровень. Но комсомольская хватка, энтузиазм, дерзание молодости, мужество и отвага нужны сегодня так же, как и во времена гражданской войны и первых пятилеток, как в огненные годы Великой Отечественной» *).

Со времени окончания войны минуло уже тридцать лет. Но подвиг советского народа навеки останется в памяти человечества. Наш народ высоко ценит вклад, который внесли в дело победы советские ученые. Честь им и слава!

*) Брежнев Л. И. Речь на торжественном Пленуме ЦК ВЛКСМ 25 октября 1968 г. — В кн.: «Ленинским курсом». Речи и статьи, т. 2. М., 1973, с. 273.

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ



Что требуется?

Простые числа разбросаны в натуральном ряду очень прихотливым образом, и не удивительно, что издревле математики стремились найти «формулу для простых чисел». Такими формулами можно называть формулы, обладающие разными свойствами, и здесь очень важно понять, что нам требуется на самом деле.

Самая простая формула для простых чисел выглядит, по-видимому, так:

$$p = p_n, \qquad (1)$$

где p_n обозначает n-е простое число. Чем же эта формула не устраивает нас? Дело в том, что правая часть этого равенства вычисляется слишком сложным образом — попробуйте, например, самостоятельно найти p_{1975}! Мы же хотим получить аналогичную формулу с возможно более простым способом вычисления правой части (однако, как мы увидим, простота вычислений — понятие совсем не очевидное). Это так сказать, *программа-максимум*.

Ради простоты формулы можно отказаться от требования явной зависимости от номера n и искать формулы, дающие простые числа, быть может, не по порядку. Далее, можно отказаться от желания задать одной формулой сразу все простые числа и требовать только того, чтобы формула давала бесконечно много простых чисел. Можно, наконец, допустить, чтобы эта формула давала наряду с бесконечно многими простыми числами и некоторые составные числа. Это — *программа-минимум*.

Формулы, кажущиеся очень простыми, на деле могут оказаться не лучше формулы (1). Именно к таким примерам мы сейчас и переходим.

Теорема Е. М. Райта

В 1947 году В. Х. Миллс опубликовал следующий результат:

Существует вещественное число λ такое, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ число

$$[\lambda^{3^n}] \qquad (2)$$

является простым *).

Впоследствии появился еще ряд формул такого же типа. Однако все это были результаты, формулировка которых выглядит заманчивой и многообещающей, но доказательство разочаровывает. Тому, кто хочет понять, почему это так, мы предлагаем разобраться в доказательстве следующей теоремы Е. М. Райта:

Существует вещественное число μ такое, что всякое число вида

$$\left[2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\mu}}}}}}\right] \qquad (3)$$

является простым.

Ключевым пунктом в доказательстве теоремы Райта является так называемый *постулат Бертрана*. Согласно этому постулату при $x \geqslant 4$ между x и $2x - 2$ всегда есть

*) Здесь и ниже $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α, то есть наибольшее целое число, не превосходящее α.

простое число. Эту гипотезу впервые высказал французский математик Бертран: доказать ее он не смог, а потому использовал в своих рассуждениях в качестве недоказуемого постулата. Доказательство гипотезы Бертрана было найдено впоследствии выдающимся русским математиком П. Л. Чебышевым*).

Чтобы найти нужное число μ, выберем сначала последовательность простых чисел $q_1, q_2, \ldots$ такую, что при любом $n=1, 2, \ldots$

$$2^{q_n} < q_{n+1} < 2^{q_n+1} - 1. \qquad (4)$$

(В качестве q_1 можно взять любое простое число, возможность же неограниченного продолжения последовательности $\{q_n\}$ с соблюдением неравенства (4) гарантирует постулат Бертрана.)

Обозначим для краткости число

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{\alpha}}}}},$$

где берется n возведений в степень, через $\exp_2^n \alpha$, а обратную функцию,

$\log_2 \log_2 \ldots \log_2 \beta$ — через $\log_2^n \beta$.

Попробуем выбрать число μ так, чтобы при $n=1, 2, \ldots$

$$[\exp_2^n \mu] = q_n. \qquad (5)$$

Согласно определению целой части числа равенство (5) эквивалентно неравенству

$$q_n \leqslant \exp_2^n \mu < q_n + 1.$$

Прологарифмировав его n раз по основанию 2, получим еще одно двойное неравенство, эквивалентное (5):

$$\log_2^n q_n \leqslant \mu < \log_2^n (q_n + 1). \qquad (6)$$

Проверьте сами, что из (4) следует

$$\log_2^1 q_1 < \log_2^2 q_2 < \ldots < \log_2^n q_n <$$
$$< \log_2^{n+1} q_{n+1} < \ldots$$
$$\ldots < \log_2^{n+1} (q_{n+1} + 1) < \log_2^n (q_n + 1) < \ldots$$
$$\ldots < \log_2^2 (q_2 + 1) < \log_2^1 (q_1 + 1).$$

Таким образом, последовательность

$$\log_2^1 q_1, \ \log_2^2 q_2, \ \ldots, \ \log_2^n q_n, \ \ldots$$

строго возрастает и ограничена сверху; следовательно, она имеет предел. Его-то мы и возьмем в качестве числа μ; докажите, что так выбранное μ удовлетворяет даже более сильному, чем (6), неравенству

$$\log_2^n q_n < \mu < \log_2^n (q_n + 1), \qquad (7)$$

и, следовательно, равенство (5) справедливо. Теорема Райта доказана.

Основным недостатком формул (2) и (3) является то, что они (точнее, их доказательства) не дают никакого способа находить новые простые числа, ибо чтобы вычислить какое-либо простое число по формулам (2) или (3), нужно числа λ и μ знать с достаточной точностью. Таким образом, формулы (2) и (3) в некотором смысле являются всего лишь замаскированными (и ухудшенными) вариантами формулы (1). Кроме того, вид формул (2) и (3) на самом деле почти ничего не говорит именно о множестве простых чисел. Из доказательства теоремы Райта видно, что формулы, аналогичные (2), (3), можно указать для любого «достаточно густого» множества.

Недостатки формул (2) и (3) порождены тем, что в них входят вещественные числа λ и μ, задаваемые неким косвенным образом. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь формулы, в которые входят только целочисленные коэффициенты. Такие формулы обладают важным преимуществом: они могут быть (в принципе) выписаны явно.

*) Прочитать об этом доказательстве можно в статье М. И. Башмакова, «Квант», 1971, № 5.

Простые числа Мерсенна и Ферма

Формулы Миллса, Райта и другие подобные формулы остались изолированными фактами, не приведшими к новым результатам. Однако в других случаях возможность представить некоторые простые числа в том или ином специальном виде имеет неожиданные и глубокие следствия.

Рассмотрим сейчас две формулы, имеющие совсем простой вид:

$$p = 2^n - 1, \qquad (8)$$
$$p = 2^n + 1. \qquad (9)$$

Очевидно, что формула (8) не всегда дает простые числа; например, если n — составное число, $n = kl$, $k>1$, $l>1$, то p делится на 2^k-1 и на 2^l-1. Но и при простом n получающееся по формуле (8) число может оказаться составным:

$$2^{11}-1=2047=23\cdot 89.$$

Простые числа, получающиеся по формуле (8), называются *числами Мерсенна* в честь Марина Мерсенна, который еще в 1664 году указал все простые значения n, не превосходящие 257, для которых, по его мнению, формула (8) дает простые числа. Однако Мерсенн не дал доказательства; впоследствии выяснилось, что его предсказание было частично ошибочным.

Интерес к числам Мерсенна вызван их связью с так называемыми *совершенными числами* — числами, равными сумме всех своих делителей, отличных, конечно, от самого числа. Еще Евклид доказал (докажите и вы), что если простое число p имеет вид, указанный в формуле (8), то число $p\cdot(p+1)/2$ является совершенным. Например,

$$3=2^2-1, \qquad 7=2^3-1$$

— простые числа, и соответственно

$$6=(3\cdot4)/2=1+2+3,$$
$$28=(7\cdot8)/2=1+2+4+7+14$$

— совершенные числа. Спустя несколько столетий Леонард Эйлер доказал (попробуйте и здесь свои силы), что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Таким образом, вопрос, конечно или бесконечно множество четных совершенных чисел, свелся к вопросу, конечно или бесконечно множество простых чисел Мерсенна, то есть к вопросу, реализует ли формула (8) нашу программу-минимум. Ответ на этот вопрос не известен до сих пор *).

Формула (9) также не всегда дает простые числа, например, если n имеет простой нечетный делитель m, то p делится на $2^{\frac{n}{m}}+1$, а если n само нечетно, то p делится на 3. Таким образом, вместо n в формулу (9) имеет смысл подставлять только 0 и степени числа 2. При $n=0$, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и 2^4 формула (9) действительно дает простые числа, и Пьер Ферма, живший в XVII веке, высказал предположение, что и при любом n вида 2^k формула (9) дает простое число; в его честь простые числа вида $2^{2^k}+1$ получили название *чисел Ферма*. Гипотезу Ферма опроверг Эйлер, указавший, что число $2^{2^5}+1$ делится на 641. В настоящее время известно несколько значений n вида 2^k, при которых по формуле (9) получаются составные числа, но не найдено ни одного нового простого числа Ферма, отличного от указанных выше.

Простые числа Ферма обнаруживают неожиданную связь с геометрией. Выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс доказал, что правильный p-угольник можно построить циркулем и линейкой при простом p в том и только том случае, когда p — число Ферма*). Более общий результат таков: правильный m-угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $m=2^s\cdot p_1p_2\ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа Ферма.

Скатерть Улама

Формулы (8) и (9) содержат возведение в степень. А нельзя ли для задания бесконечно многих простых чисел обойтись лишь сложением, вычитанием и умножением? Поищем ответ на этот вопрос.

Начнем с рассмотрения многочленов от одной переменной с натуральными коэффициентами; посмотрим, какие многочлены будут своими значениями иметь простые числа и в каком количестве.

Возьмем вначале многочлены первой степени (то есть линейные многочлены). Очевидно, что *тривиальный* многочлен x задает бесконечно много простых чисел, более того, все простые числа, но это неинтересный случай. А что можно сказать о многочлене $ax+b$ (где a, b и x — натуральные числа)? Ясно, что если a и b имеют общий делитель, отличный

*) Об истории и современном состоянии исследований по совершенным числам и простым числам Мерсенна вы можете прочитать в статье И. Я. Депмана, «Квант», 1971, № 8.

*) Подробнее об этом открытии тогда еще совсем молодого Гаусса рассказано в статье С. Г. Гиндикина, «Квант», 1972, № 1.

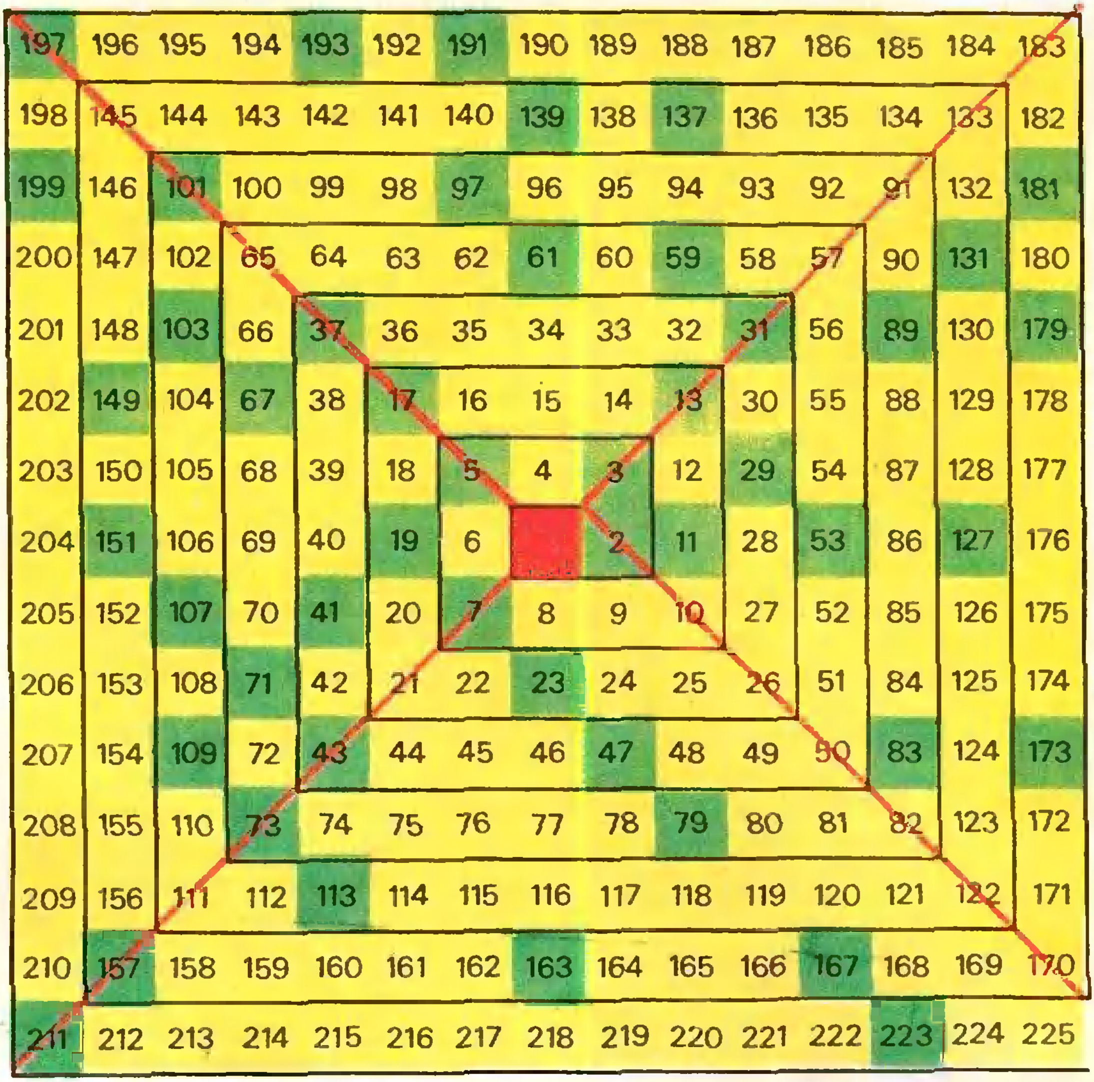


Рис. 1.

от 1, то значение многочлена $ax + b$ — число составное, кратное этому делителю. Случай же, когда a и b взаимно просты, гораздо менее очевиден.

Французский математик Лежандр (живший в XVIII веке) высказал гипотезу, что если a и b взаимно просты, то в арифметической прогрессии с первым членом b и разностью a встречается бесконечно много простых чисел. Эта гипотеза была доказана лишь в прошлом столетии немецким математиком Леженом Дирихле.

Перейдем теперь к квадратным многочленам. Среди них есть «рекордсмены», например, многочлен $x^2 + x + 41$ — его изучал еще Леонард Эйлер. Этот многочлен принимает простые значения при $x = 1, 2, \ldots, 40$. При $x = 41$ его значение — составное.

Доказано, что никакой многочлен (отличный, разумеется, от константы) не может иметь в качестве значений только простые числа, но до сих пор не известно, существует ли многочлен (кроме линейного), среди значений которого встречается бесконечно много простых чисел.

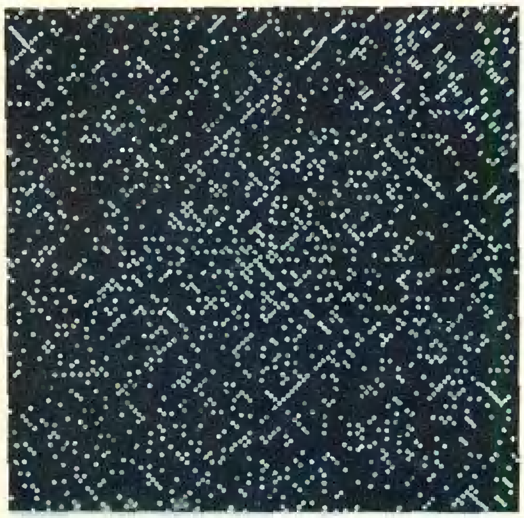


Рис. 2

57	56	55	54	53
58	45	44	43	52
59	46	41	42	51
60	47	48	49	50
61	62	63	64	65

Рис. 3.

Интерес к представлению простых чисел в виде значений квадратных многочленов недавно возродился в связи с неожиданным наблюдением С. М. Улама*). Начав на спирали из всех натуральных чисел (рис. 1) отмечать простые числа, Улам с удивлением обнаружил, что простые числа выстраиваются по диагоналям, образуя довольно длинные цепочки. (Докажите, что числа, расположенные вдоль какой-либо диагонали в пределах, ограниченных на рисунке 1 красными линиями — это значения некоторого квадратного многочлена с целыми коэффициентами). Еще более удивительным оказалось то, что закономерность эта наблюдалась и тогда, когда спираль была продолжена (с помощью ЭВМ) до больших чисел — на рисунке 2 светлыми точками отмечены простые числа на спирали из первых 10 000 чисел. Узор, изображенный на рисунке 2, получил название *«скатерть Улама»*.

Чтобы отмеченная закономерность проявилась, не обязательно начинать спираль с единицы. Например, значения многочлена x^2+x+41 выстраиваются по диагоналям у спирали, начинающейся с числа 41 (рис. 3). Возможно, что читатели «Кванта», проявив изобретательность и должное терпение, смогут найти новые красивые «геометрические» закономерности расположения простых чисел среди множества всех чисел.

Феномен со стремлением простых чисел располагаться в цепочки вдоль диагоналей был обнаружен сравнительно недавно и еще не получил какого-либо математического объяснения.

О представлении простых чисел с помощью многочленов от многих переменных мы скажем в конце статьи.

Экспоненциальный многочлен Джулии Робинсон

Экспоненциальные многочлены отличаются от обычных тем, что в них показателями степени могут быть не только конкретные натуральные числа, но и линейные многочлены от переменных с натуральными коэффициентами, то есть многочлены вида $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k+b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$, b — целые неотрицательные числа.

Простейшими примерами экспоненциальных многочленов от переменной n являются правые части формул (8) и (9).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все встречающиеся у нас переменные принимают целые положительные значения.

В 1952 году американский математик Джулия Робинсон*) опубликовала следующий замечательный результат:

*) Как было сделано это наблюдение, красочно рассказывает М. Гарднер в «Математических досугах», М., «Мир», 1972.

*) Точнее, Робинсон получила чуть более слабый результат, а эту изящную форму придал результату Робинсон впоследствии Х. Патнам.

Существует экспоненциальный многочлен $R(x_0, \ldots, x_k)$, такой, что

любое его положительное значение при целых положительных значениях переменных является простым числом;

любое простое число можно представить в таком виде.

В результате получается такая «формула для простых чисел»:

$$p = R(x_0, \ldots, x_k). \qquad (10)$$

Эта формула замечательна вот чем. Во-первых, в нее входят только целые числа, и потому, в отличие от формул Миллса, Райта и им подобных, формула Джулии Робинсон может быть выписана явно. Во-вторых, она задает все простые числа, а не только какие-то избранные из них, в отличие от всех рассмотренных выше формул. В-третьих, хотя формула (10) задает и не только простые числа, у нас есть очень простой способ отсеивания «лишних» чисел: каждое не простое значение R при целых положительных значениях неизвестных не превосходит нуля. Этим формула Джулии Робинсон выгодно отличается от формул (8) и (9), а также и от только что рассмотренных *полиномиальных формул* *).

Доказательство Джулии Робинсон совершенно элементарно. Ниже излагаются его основные идеи; доведение же доказательства до формальной строгости мы оставляем читателям: все промежуточные результаты сформулированы в виде пяти лемм, — их-то и нужно доказать. Как мы увидим, из этих лемм следует не только существование экспоненциального многочлена R, но и его явный вид.

Что мы должны сделать?

Чтобы доказать теорему Джулии Робинсон, мы, очевидно, должны указать экспоненциальный многочлен R, такой, что уравнение (10) разрешимо в натуральных числах относительно переменных $x_0, \ldots, x_k$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$p \text{ — простое число.} \qquad (11)$$

Это — пример *условия* на переменное p.

Приведем еще несколько примеров *условий* на набор переменных

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k. \qquad (11')$$

Если мы потребуем, чтобы набор чисел (11) удовлетворял системе уравнений вида

$$F_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, s), \qquad (11'')$$

или допустим словесное описание типа: *«все λ_i — простые числа»*, или *«λ_1 — простое число, $ax_0, \ldots, x_k$ — четные числа»* и т. д., то тем самым мы из множества в с е х наборов (11′) выделим н е к о т о р ы е, подчиняющиеся наложенному на них *условию*.

Мы не станем точно определять, условия какого вида являются для нас допустимыми. Приведенное описание примеров условий достаточно для оправдания того способа действий, которым мы в дальнейшем будем пользоваться.

В последующем изложении мы будем различать переменные, называя некоторые из них *параметрами*, так что деление переменных на *параметры* и *неизвестные* у нас является чисто условным.

Если все левые части системы уравнений (11″) являются экспоненциальными многочленами от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k$, и решения этой системы ищутся в целых положительных числах, то такая система называется *экспоненциально диофантовой*; если F_i — обыкновенные многочлены, то система уравнений (11″) называется просто *диофантовой*.

Уравнение (10) является примером экспоненциально диофантова уравнения относительно переменных $p, x_0, \ldots, x_k$.

Мы будем говорить, что две системы условий, имеющие одни и те же параметры, эквивалентны друг другу относительно этих параметров, если множество тех значений параметров, при которых имеет решение одна из этих систем, совпадает со множеством тех значений параметров, при котором имеет решение и другая система. (Обратите внимание, что в этом определении ничего не гово-

*) Полиномиальная формула — это формула, задаваемая многочленом.

рится о связи значений *неизвестных* — для наших целей это неважно, эквивалентные в нашем понимании системы могут вообще не иметь общих неизвестных.)

Примером эквивалентных условий относительно параметра λ могут служить неравенство

$$2^n < \lambda < 2^{n+1}$$

и равенство

$$\lambda = (2x_0 + 1) \cdot x_1.$$

Ясно, что каждое из этих условий имеет решение тогда и только тогда, когда параметр λ принадлежит множеству чисел, не являющихся целыми степенями числа 2.

В этой терминологии наша цель формулируется так: *найти экспоненциальный многочлен* $R(x_0, \ldots, x_k)$, *такой, что условие* (10) *эквивалентно условию* (11) *относительно параметра* p.

Однако требование, чтобы параметр p стоял только в левой части равенства (10), является, как мы сейчас увидим, излишне жестким.

Пусть удалось найти экспоненциальный многочлен $Q(p, x_1, \ldots, x_k)$, такой, что экспоненциально диофантово уравнение (условие на p, $x_1, \ldots, x_k$)

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (12)$$

эквивалентно условию (11).

Положим

$$R(x_0, \ldots, x_k) = x_0 \cdot (1 - Q^2(x_0, \ldots, x_k)). \qquad (13)$$

Лемма 1. *Если экспоненциальные многочлены* R *и* Q *связаны соотношением* (13), *то уравнения* (10) *и* (12) *эквивалентны относительно параметра* p.

Нам достаточно даже найти не уравнение, а хотя бы систему экспоненциально диофантовых уравнений

$$\begin{cases} Q_1(p, x_1, \ldots, x_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_l(p, x_1, \ldots, x_k) = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

эквивалентную условию (11) относительно p.

Лемма 2. *Если*

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{l} Q_i^2(p, x_1, \ldots, x_k),$$

то система (14) *эквивалентна уравнению* (12).

Именно поиском системы экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентной условию (11), мы и будем заниматься.

Что такое простое число?

Странный вопрос, — удивится читатель. Каждый знает, что простое число — это число, большее единицы, которое делится только на единицу и на себя. Конечно, это так, но с таким определением работать нелегко — ведь оно предполагает, что проверка простоты числа состоит в переборе бесконечного числа потенциальных делителей — всех натуральных чисел, кроме 1 и самого числа. Лучше сказать так: *число* p *является простым, если* $p > 1$ *и* p *не делится ни на какое число, меньшее* p *и отличное от* 1. Для наших же целей больше подходит следующее определение:

число p *является простым, если* $p > 1$, *и для любого числа* q, *меньшего* p, Н.О.Д.$(q, p) = 1$ *.)

В этом определении нет ограничения $q \neq 1$, и, что более важно, оно позволяет *переменное число* условий Н.О.Д. $(1, p) = 1$, Н.О.Д.$(2, p) = 1$, ..., Н.О.Д.$(p-1, p) = 1$ свести в *одно* условие:

$$\text{Н.О.Д}((p-1)!, p) = 1.$$

Сделанное замечание позволяет нам написать первую систему условий, эквивалентную условию (11) относительно параметра p:

$$\begin{cases} p = r + 1, & (15) \\ s = r!, & (16) \\ \text{Н.О.Д.}(s, p) = 1. & (17) \end{cases}$$

Первое из этих условий имеет искомый вид экспоненциально диофантова (более того, диофантова) уравнения, а третье легко приводится к такому же виду за счет введения двух новых неизвестных:

*) Н.О.Д.(a, b) — это наибольший общий делитель чисел a и b.

Лемма 3. *Условие* (17) *эквивалентно относительно параметров* p *и* s *условию*

$$x_1\cdot s - x_2\cdot p = 1\ ^{*}). \qquad (18)$$

Так как уравнение (18) экспоненциально диофантово, то нам осталось лишь найти систему экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентную относительно параметров r и s условию (16).

Как вычислить факториал?

В условие (16) входит $r!$; этот-то факториал и «мешает» нам. Вспомним, что факториал фигурирует в выражении для биномиальных коэффициентов**): при $t\geqslant r$

$$C_t^r = \frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{r!},$$

то есть

$$r! = \frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{C_t^r}.$$

Многочлен, стоящий в числителе, имеет довольно сложную структуру. Попытаемся заменить его более простым — а именно, многочленом t^r. При $t\geqslant r$ имеем:

$$\frac{t^r}{C_t^r} = \frac{t^r}{t(t-1)\ldots(t-r+1)}\times$$

$$\times\frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{C_t^r} =$$

$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\left(1+\frac{2}{t-2}\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(1+\frac{r-1}{t-r+1}\right)\cdot r! \geqslant r!. \quad (19)$$

Легко видеть, что

$$r! = \lim_{t\to\infty}\frac{t^r}{C_t^r}, \qquad (20)$$

однако эта запись факториала нам ничего не даст, поскольку t, будучи параметром в искомой системе уравнений, сможет принимать любые, сколь угодно большие, но конечные значения. Но мы и не будем переходить к пределу, а воспользуемся целочисленностью $r!$ — из (19) и (20) следует, что при достаточно больших t

$$r! = \left[\frac{t^r}{C_t^r}\right]. \qquad (21)$$

Лемма 4. *Формула* (21) *верна как только* $t\geqslant 2\,r^{r+2}$.

Лемма 4 позволяет преобразовать условие (16) в эквивалентную ему относительно параметров r и s систему (проверьте эквивалентность!)

$$\begin{cases} t = 2r^{r+2}, & (22)\\ c = C_t^r, & (23)\\ t^r = s\cdot c + (x_3-1), & (24)\\ (x_3-1)+x_4 = c. & (25)\end{cases}$$

Здесь условия (22), (24) и (25) имеют требуемый вид, и нам остается лишь найти систему экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентных условию (23) относительно параметров r, t и c.

Итак, нам осталось «избавиться» от биномиального коэффициента.

Биномиальные коэффициенты — это коэффициенты бинома!

Только что мы использовали выражение биномиальных коэффициентов через факториал; но биномиальные коэффициенты имеют много и других определений. Воспользуемся теперь тем, что

$$(u+1)^t = \sum_{i=0}^{t} C_t^i u^i. \qquad (26)$$

Эта формула является определением биномиальных коэффициентов, если рассматривать ее как *тождество* относительно u. Но нам нужно, чтобы u было *неизвестной*, принимающей в каждом конкретном решении искомой системы лишь одно значение.

*) Сравните эту лемму с леммой 2 из «Кванта» № 6 за 1972 год, с. 33.

**) О свойствах биномиальных коэффициентов «Квант» рассказывал неоднократно; см., например, № 6 за 1970 год, с. 17—25, или № 2 за 1973 год, с. 27 — 34.

Заметим, что

$$C_t^i \leqslant \sum_{i=0}^{t} C_t^i = (1+1)^t = 2^t, \quad (27)$$

и, таким образом, если

$$u > 2^t, \quad (28)$$

то $C_t^0, C_t^1, \ldots, C_t^t$ — это цифры в записи числа $(u+1)^t$ в позиционной системе счисления с основанием u. Следовательно, биномиальные коэффициенты однозначно определяются тем условием, что равенство (26) и неравенства (27) и (28) одновременно выполнены *хотя бы при одном* значении u.

Лемма 5. *Условие* (23) *эквивалентно относительно параметров* r, t *и* c *системе условий*

$$\begin{cases} u = 2^t + 1, & (29)\\ x_5 = u + 1, & (30)\\ x_5^t = x_8 u^{r+1} + c u^r + x_7, & (31)\\ x_7 + x_8 = u^r, & (32)\\ c + x_9 = u & (33)\end{cases}$$

Здесь все условия уже имеют необходимый нам вид.

Итак, мы показали, что условие (11) эквивалентно относительно параметра p системе, состоящей из экспоненциально диофантовых уравнений (15), (18), (22), (24), (25), (29) — (33). Чтобы получить требуемый экспоненциальный многочлен, осталось переименовать переменные r, s, t, c и u в x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, объединить по лемме 2 все уравнения в одно и преобразовать по лемме 1 это уравнение к искомому виду (10).

Дальнейшие шаги

Формула (10) не содержит явно номера задаваемого ею простого числа. Описанный выше способ построения экспоненциального многочлена R не дает прямого пути для включения номера простого числа в формулу (10). Используя существенно более сложную технику, Мартин Дейвис, Хилэри Патнам и Джулия Робинсон в 1961 году доказали одну очень сильную теорему, которая имеет такое следствие.

Существует экспоненциальный многочлен $P(x_0, \ldots, x_k, n)$ такой, что при каждом фиксированном значении параметра n и произвольных значениях остальных переменных, многочлен P принимает ровно одно положительное значение, и этим значением является n-е простое число.

В 1970 году автору этой статьи удалось, используя другие результаты Джулии Робинсон, построить такое диофантово уравнение

$$M(a, b, c, z_1, \ldots, z_m) = 0, \quad (34)$$

которое разрешимо тогда и только тогда, когда параметры a, b и c связаны соотношением $a = b^c$. Этот результат позволяет опустить в формулировке предыдущей теоремы слово «экспоненциальный», то есть позволяет построить многочлен, задающий простые числа. Об этом, однако, мы поговорим в другой раз. Те же читатели, кого заинтересовала подобная тематика и кого не страшат трудности, могут попробовать самостоятельно разобраться в статье автора «Диофантовы множества», опубликованной в журнале «Успехи математических наук», XXVII, № 5, 1972 год.

Темы для размышлений

1. Докажите, что в арифметических прогрессиях 3, 7, 11, ... и 5, 11, 17, ... бесконечно много простых чисел.

2. Каково множество тех многочленов, значения которых лежат вдоль диагонали, если спираль (см. с. 9) начата с 1? с некоторого числа u^2 с некоторого числа u, и по спирали стоят члены арифметической прогрессии u, $u+v$, $u+2v$, ...?

3. Теорема Вильсона утверждает, что если p — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на p. Как можно использовать этот результат, чтобы уменьшить число неизвестных в экспоненциальном многочлене R, задающем простые числа?

4. Постройте экспоненциальный многочлен $S(x_0, \ldots, x_k)$, который задает множество полусумм *простых чисел близнецов*, то есть такой, что если $S(x_0, \ldots, x_k) > 0$, то оба числа $S(x_0, \ldots, x_k) - 1$ и $S(x_0, \ldots, x_k) + 1$ являются простыми, и наоборот, если $s-1$ и $s+1$ — простые числа, то $S(x_0, \ldots, x_k) = s$ при некоторых $x_0, \ldots, x_k$.

5. Постройте экспоненциальный многочлен $T(q, x_0, \ldots, x_m)$, такой, что

если q — простое число, то существуют числа $x_0, \ldots, x_m$ такие, что $T(q, x_0, \ldots, x_m) > 0$;

если q — простое число и $T(q, x_0, \ldots, x_m) > 0$, то $T(q, x_0, \ldots, x_m)$ — простое число, следующее за q;

если q не является простым числом, то всегда $T(q, x_0, \ldots, x_m) \leqslant 0$.

Этот экспоненциальный многочлен дает «формулу для следующего простого числа».

А. В. Чаплик

Волновая механика

Около пятидесяти лет назад родилась квантовая механика — наука о законах движения микроскопических частиц материи (атомов, атомных ядер, электронов и т. п.). Эти законы оказались настолько удивительными, настолько не похожими на то, с чем сталкивались физики до сих пор, что вначале даже крупные ученые отказывались верить выводам квантовой механики. Да и в наши дни не прекращаются дискуссии о физических основах этой науки, хотя многие ее разделы уже стали инженерными дисциплинами.

В первые годы существования квантовой механики ее называли волновой механикой. Сейчас это название уже начинают забывать, а между тем в нем содержится указание на самую главную черту, присущую явлениям микромира. Ведь квантовый, то есть дискретный характер процессов, в которых участвуют микрочастицы, связан именно с их волновыми свойствами. Например, тот факт, что энергия электронов в атоме может принимать лишь определенный дискретный набор значений, есть следствие волновой природы электрона.

В этой статье мы постараемся разобраться, что означают слова «волновая природа электрона» и почему она приводит к дискретности его свойств. Начать придется издалека.

Частицы и волны

Как мы описываем движение больших тел, например, движение артиллерийского снаряда, спутника Земли, планеты вокруг Солнца? Такие тела называют макроскопическими (в отличие от микрочастиц), и особенности их движения хорошо известны. Конечно, спутники Земли и артиллерийские снаряды вряд ли можно считать вполне обыденными вещами. Но законы, которые управляют их движением, легко понять на основе нашего повседневного опыта.

Мы привыкли к тому, что каждое тело занимает определенное место в пространстве, и это место можно указать, задавая координаты тела. Если тело движется, то оно с течением времени меняет свое положение в пространстве. Чтобы описать движение тела, можно указать положения, которые оно занимает в последовательные моменты времени, то есть (выражаясь более точно) можно задать зависимость координат тела от времени. Это — язык механики, вернее даже, — ее азбука. Но откуда берется уверенность, что можно в каждый момент времени определить положение тела в пространстве, задав его координаты? Ответ совершенно ясен: оттуда же, откуда берутся вообще все наши знания — из опыта. Именно повседневный опыт служит источником понятий и представлений, которыми пользуется обычная механика — механика макроскопических тел (ее также называют классической). Важно запомнить это обстоятельство: в повседневном опыте мы имеем дело с *макроскопическими* телами, поэтому наши привычные представления о перемещении в пространстве относятся как раз к таким телам. Согласно этим представлениям каждое движущееся тело имеет свою траекторию, и в каждой точке траектории можно указать скорость тела, его ускорение и т. д. Так описывается движение тел в классической механике.

По-иному приходится поступать при описании волновых процессов, например, звука или волн на поверхности воды. Первое, что нужно отметить, это бессмысленность понятия траектории для волн. Ведь звук распространяется от своего источника по *всем направлениям. Если все-таки* задать вопрос: где в данный момент находится звуковая волна, то ответ должен быть следующим: это некоторая часть пространства, ограниченная поверхностью, до которой волны успели дойти к данному моменту времени. Внутри этой поверхности в каждой точке (разумеется, если источник работает непрерывно) существуют колебания плотности воздуха, которые и являются звуком. Значит, бессмысленно говорить о координате звука, о точке пространства, в которой находится звук. Это становится особенно ясным в случае волн в замкнутой полости, где могут возникнуть стоячие волны. Примером могут служить резонансный ящик для камертона, духовые музыкальные инструменты (такие, как орган или саксофон), барабан и т. д. Когда по барабану ударяют, то внутри него устанавливаются стоячие волны, и при этом звучит весь объем воздуха, заключенный внутри барабана. Таким образом, можно сказать, что волна заполняет все доступное ей пространство, и такие понятия, как координата или траектория, к волнам не применимы. Здесь следует пользоваться другим языком. Волны характеризуются их амплитудой, частотой, фазой, скоростью распространения, длиной волны.

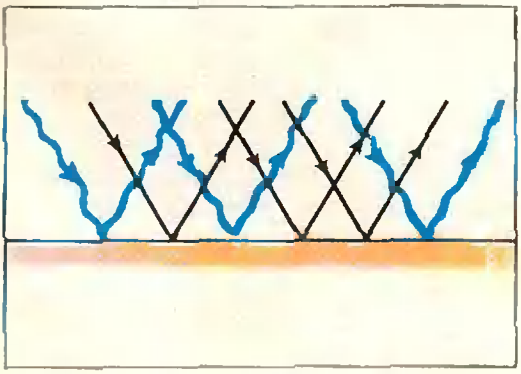


Рис. 1. Отражение от идеальной поверхности. Прямые линии изображают потоки частиц, волнистые соответствуют волнам.

Остановимся еще на одном различии в свойствах волн и частиц, которое очень важно для дальнейшего. Замечательной особенностью волн является их способность огибать препятствия, отклоняться от прямолинейного распространения при взаимодействии с препятствием. Это явление называется дифракцией и является исключительной привилегией волн. Волна, в прямом смысле слова, может завернуть за угол, частица — нет. Например, можно услышать речь, стоя за углом дома и не видя разговаривающих людей.

С явлением дифракции тесно связано поведение волн при их отражении от шероховатой поверхности. Если бы отражающая поверхность была идеально гладкой, то волны и частицы вели бы себя совершенно одинаково (рис. 1). Для тех и других выполнялся бы известный закон: угол падения равен углу отражения (разумеется, надо оговорить, что удар частиц о поверхность предполагается абсолютно упругим). Легко сообразить, что в этом идеальном случае параллельный пучок летящих частиц остается параллельным и после отражения от поверхности, так как скорость каждой частицы поворачивается на один и тот же угол. То же самое относится и к волнам.

Посмотрим теперь, что происходит в реальном случае, то есть когда поверхность не является идеально ровной плоскостью, а имеет некоторые

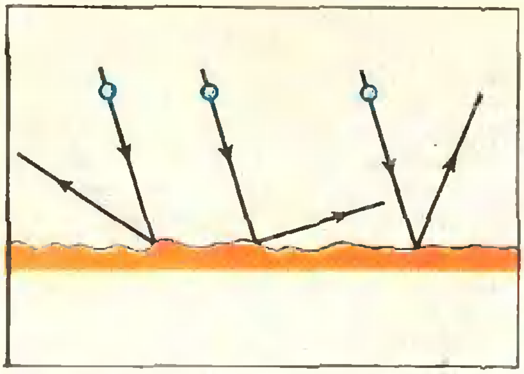


Рис. 2.

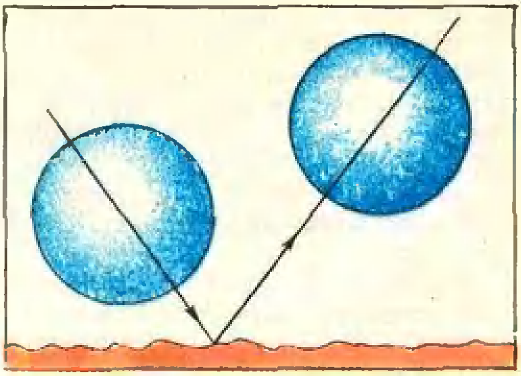


Рис. 3.

шероховатости. Начнем с частиц. Следует различать два случая. Первый, изображенный на рисунке 2, соответствует маленьким частицам. Их размеры гораздо меньше высоты и ширины зубцов поверхности, поэтому можно рассматривать такие частицы как материальные точки. Каждая из этих частиц попадает на некоторый участок поверхности, на некоторый склон зубца, и отражается от этого склона все по тому же закону: угол падения равен углу отражения. Но так как каждый зубец наклонен под своим определенным углом к направлению первичного потока частиц, то частицы, попавшие на разные зубцы, отлетают в разных направлениях. В результате отраженные частицы уже не образуют параллельного пучка, а разлетаются хаотически под разными углами.

Если же на поверхность падают большие частицы, которые при соприкосновении с поверхностью накрывают сразу много зубцов, то картина получается иной (рис. 3). «С точки зрения» такой частицы поверхность с мелкими зубцами мало отличается от идеальной плоскости. Например, стол для пинг-понга наверняка имеет шероховатую поверхность (неровно обработана фанера, краска легла не везде одинаковым слоем и т. д.), тем не менее шарик отскакивает почти так же, как от ровной плоскости. Дело в том, что большой шарик, касаясь при ударе сразу многих мелких зубцов поверхности, как бы усредняет их действия, и это усредненное действие оказывается *почти таким же, как для идеальной плоскости*. В таких случаях говорят о зеркальном отражении.

Отражение волн от шероховатой поверхности также может происходить двояким образом. Длинные волны (длина волны больше размеров неровностей) дифрагируют на неровностях; в результате отражение оказывается близким к идеальному. Например, неровности поверхности обычного зеркала гораздо меньше длин волн видимого света. Отражение света происходит направленно (зеркально). Однако жесткие рентгеновские лучи, длина волны которых в тысячи раз меньше, чем у видимого света, отражаются от того же зеркала рассеянно (диффузно) — отраженные лучи идут в различных направлениях.

Итак, при отражении потоков частиц или волн от неровностей поверхности решающую роль для частиц играет соотношение между размерами неровностей и размерами частиц, а в случае волн — соотношение между размерами неровностей и длиной волны.

Мы подошли теперь к главной части нашего рассказа.

Как ведут себя электроны

Когда Дж. Дж. Томсон в самом конце прошлого века открыл электрон, он представлял его себе как частицу, несущую определенную порцию электрического заряда. Действительно, все опыты как будто говорили за то, что электрон — это частица, заряженная отрицательным электричеством и ведущая себя так, как и полагается частицам. Мы уже знаем, что это означает. Во-первых, электроны можно считать поштучно (например, измеряя полный заряд и деля его на заряд одного электрона); никто еще никогда не наблюдал половины электрона. Во-вторых, каждый электрон пучка характеризуется своей траекторией, которую можно изменять, воздействуя на пучок электрическим или магнитным полем. Момент попадания электрона в мишень можно фиксировать по вспышке в люминесцирующем покрытии мишени. Эта вспышка практически точечная, а это значит, что электрон оказывает действие лишь на очень малую область мишени. Следовательно, можно говорить о координате электрона, о его траектории, то есть обо всем, что характеризует его как частицу.

Именно на основе представлений об электроне как о частице возникла так называемая планетарная модель атома, предложенная Резерфордом. В этой модели атом рассматривался как миниатюрная Солнечная система, в которой вокруг «Солнца» — атомного ядра — движутся по орбитам «планеты» — электроны. Размеры атома, то есть радиусы электронных орбит, вскоре удалось выяснить. Они оказались величинами порядка 10^{-8} *см*, или одного ангстрема. Относительно размеров самого электрона имелись расхождения во мнениях, но все сходились на том, что его радиус должен быть, конечно же, меньше 10^{-8} *см*. Ведь электрон — часть атома, а часть, во всяком случае, не может быть больше целого. Но вот в 1927 году американские физики Дэвиссон и Джермер осуществили свои знаменитые опыты с пучками электронов. И сразу стало ясно, что взгляд на электроны как на маленькие твердые шарики, мягко говоря, наивен. Природа электрона оказалась гораздо более сложной.

Мы разберем здесь лишь один из опытов Дэвиссона и Джермера. Параллельный пучок электронов направлялся на грань кристалла и отражался от нее. *Отраженный пучок оставался параллельным* (как в случае отражения видимого света от зеркала). Вот и все. На первый взгляд в этом факте нет ничего удивительного. Ведь мы знаем, что при определенных условиях частицы могут испытывать зеркальное отражение от твердой поверхности. Но не нужно забывать, что «с точки зрения электрона» поверхность кристалла ни в коем случае не является сплошной поверхностью. Кристалл состоит из атомов, разделенных промежутками пустого пространства. Размеры промежутков примерно равны размерам самих атомов и составляют величину порядка 10^{-8} *см*. А электроны — это маленькие частицы, радиус их много меньше, чем 10^{-8} *см*. Значит, при соударении пучка электронов с кристаллом должна иметь место ситуация, когда размеры частиц меньше размеров неровностей. Следовательно, отражение электронов должно быть диффузным.

Таким образом, либо надо считать электроны очень большими шарами, гораздо больше самих атомов (тогда они отражались бы от кристалла зеркально), либо... либо электроны не подчиняются законам классической механики и не являются частицами в привычном смысле этого слова. Первая возможность приводит к явной бессмыслице: большой шар не может кружиться по орбите внутри маленького атома. Значит, остается вторая возможность, сколь бы невероятной она ни казалась.

Зеркально отражаться от поверхности кристалла могут лишь волны, длина которых больше расстояния между атомами в кристалле. Следовательно, нужно считать, что пучок электронов ведет себя подобно волнам, а тогда возникает вопрос о характерных параметрах этих волн: об их частоте, длине волны и т.д. Ко времени опытов Дэвиссона и Джермера уже была известна «сумасшедшая» гипотеза французского ученого де Бройля (высказанная в 1923 году) о том, что всякая частица ведет себя подобно волне, длина которой λ связана с импульсом $p=mv$ частицы следующей формулой (формула де Бройля):

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}.$$

Заметим, что величина h в этой формуле — знаменитая постоянная Планка, равная $6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·с*. Она связывает частоту ν колебаний электромагнитного поля с энергией E его кванта (фотона) по формуле Планка: $E=h\nu$, или длину волны с импульсом фотона: $\lambda=\frac{h}{p}$. Идея де Бройля возникла из предположения о симметрии в природе. Теория показала, что волны обладают в некотором смысле свойствами частиц. Не могут ли частицы в свою очередь обладать волновыми свойствами? Гипотеза де Бройля состоит в том, что указанные соотношения одинаково применимы как к фотонам, так и к частицам вещества. Многочисленные эксперименты, проведенные впоследствии, это действительно подтверждают.

Формулы Планка и де Бройля связывают механические характеристики частиц (импульс, энергию) с их волновыми характеристиками (длиной волны и частотой). Чрезвычайно малая (с точки зрения привычных нам масштабов) величина постоянной Планка показывает, что волновые эффекты в движении частиц становятся существенными лишь в области микромира. В самом деле, шарик для пинг-понга массой 1 *г*, летящий со скоростью 1 *м/с*, имеет дебройлевскую длину волны, равную $6{,}6\cdot10^{-29}$ *см*. Это фантастически малая длина, в триллионы раз меньшая размеров атомного ядра. Совершенно ясно, что никаких волновых эффектов (например, дифракции) в движении такого тела обнаружить нельзя. Напротив, для электрона в атоме длина волны де Бройля равна примерно 10^{-8} *см* ($m\approx9\times\times10^{-28}$ *г*, $v\approx10^{8}$ *см/с*), то есть порядка размеров самого атома, в котором движется электрон. В этих условиях волновое поведение электрона играет определяющую роль. Вся специфика атомных явлений и, в частности, их квантовый характер связаны именно с этим волноподобным поведением электронов. Мы рассмотрим сейчас простейший пример, показывающий, как дискретность свойств атома вытекает из волновой природы электрона.

При обычных условиях электроны удерживаются внутри атома силами электростатического притяжения и не могут удалиться от ядра на слишком большое расстояние. Таким образом, принадлежащие атому электроны движутся в ограниченной области пространства. Их обычно называют связанными электронами. Наоборот, электроны в пучке, созданном электронной пушкой, могут, в принципе, попасть в любую область пространства, поэтому называются свободными. Пример, о котором идет речь, схватывает именно эту особенность атомного электрона: ограниченность области пространства, доступной для его движения.

Для простоты рассуждений представим себе, что электрон может двигаться только вдоль некоторой прямой и не выходит за пределы отрезка AB (рис. 4). Скажем, в точках A и B находятся твердые стенки, сквозь которые электрон не может проникнуть. Такая система является одномерной моделью атома. Разумеется, атомы устроены гораздо сложнее, и наш пример не претендует на количественное соответствие реальному атому. Но главную качественную особенность атомов — существование дискретных энергетических уровней — нам удастся проследить даже на этой простой модели. (Впрочем, следует заметить, что такая модель может иметь и непосредственный физический смысл. Например, она довольно хорошо описывает поведение электронов в тонких пленках металлов или полупроводников. В этом случае отрезок AB изображает толщину пленки, а две поверхности пленки играют роль стенок, не выпускающих электрон наружу.) Чтобы рассчитать характеристики такого одномерного атома, воспользуемся формулой де Бройля. Поскольку электрон «заперт» в ограниченной области пространства (в данном случае — на отрезке прямой), то мы должны говорить о стоячих волнах. Аналогичные механические одномерные стоячие волны возникают, например, при колебаниях струны, закрепленной в двух точках. Естественно, что эти точки закрепления следует сопоставить точкам A и B, за которые электрон не может проникнуть. Колебания струны также не проникают сквозь закрепленные концы. Это означает, что смещения точек струны при колебаниях всегда таковы, что точки A и B являются узловыми (их смещения всегда равны нулю). Отсюда сразу следует, что на отрезке AB должно укладываться целое число полуволн. Таким образом, колеблющаяся струна с закрепленными концами может находиться лишь в определенных состояниях движения, которые можно нумеровать по числу полуволн, укладывающихся между точками A и B. Другими словами, в струне возможны лишь такие волны, длина которых λ удовлетворяет следующему соотношению: $AB = n\lambda/2$, где n — целое число, принимающее значения 1, 2, 3 и т. д. На рисунке 4 случаи I, II, III, IV соответствуют n, равному 1, 2, 3 и 4. Обозначим длину отрезка AB буквой L. Тогда возможные длины волн λ_n задаются формулой

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

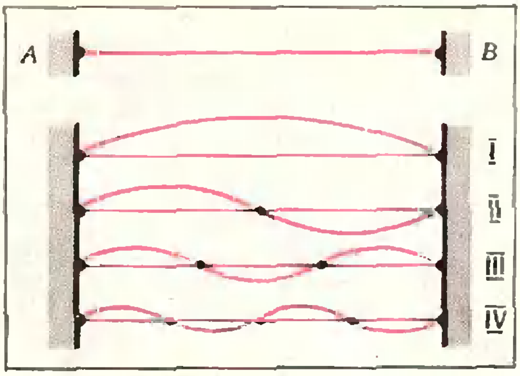


Рис. 4.

Теперь вернемся к электрону, бегающему между двумя стенками, и применим к нему формулу де Бройля. Поскольку может существовать лишь дискретный набор длин волн λ_n, то скорость электрона $v_n = \dfrac{h}{m\lambda_n}$ может принимать также лишь дискретный набор значений:

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = \frac{h}{m2L}n; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Кинетическая энергия электрона равна $E = mv^2/2$, и она тоже не может быть произвольной. Существуют лишь дискретные энергетические уровни:

$$E_n = \frac{h^2n^2}{8mL^2}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (*)$$

(число n называется квантовым числом). Мы получили одну из первых формул квантовой механики — энергетические уровни электрона, «запертого» между двумя непроницаемыми стенками. С точки зрения классической механики сама постановка вопроса о дозволенных значениях энергии для этого случая бессмысленна. Если классический шарик прыгает между двумя стенками, упруго отражаясь от них, то его энергия $E = \dfrac{mv_0^2}{2}$ зависит от начальной скорости v_0 и может принимать любые значения. Никакой энергетической «лестницы» не существует, возможные значения энергии заполняют всю шкалу энергий. Для микрочастицы, как мы видели, дело обстоит поиному. Ее энергия может иметь лишь дискретный набор значений, и эта дискретность есть прямое следствие волновой природы микрочастицы.

Вообще говоря, выражение для энергетических уровней можно формально применить и к классической частице, например, все к тому же пинг-понговому шарику. Пусть его масса $m = 1$ *г*, а расстояние между стенками $L=10$ *см*; тогда вследствие чрезвычайной малости h расстояния между соседними уровнями окажутся невообразимо маленькими; например,

$$E_{21} = \frac{h^2}{8mL^2}(2^2-1) \approx 16\cdot10^{-55} \text{ эрг.}$$

Энергетическая лестница получается настолько густой, что практически энергия может изменяться непрерывно, как и должно быть для классической частицы. В этом заключается предельный переход от квантовой механики к классической.

Помимо волновой природы микрочастиц для возникновения дискретного спектра чрезвычайно существенным оказывается тот факт, что движение частицы происходит в ограниченной области пространства. В этом случае, как мы уже говорили, возникают стоячие волны, а такие колебания характеризуются дискретными значениями длин волн, и следовательно, частот. Частота же, помноженная на h, равна энергии частицы. Общая тенденция такова, что чем меньше размеры доступной области движения, тем больше расстояние между соседними уровнями энергии (см., например, формулу (*)). Если же микрочастица движется под действием таких сил, которые разрешают ей уйти на бесконечность, то стоячие волны не возникают, и энергия может иметь любое значение. В этом случае говорят, что квантовая система имеет непрерывный спектр энергии (например, луч электронной пушки).

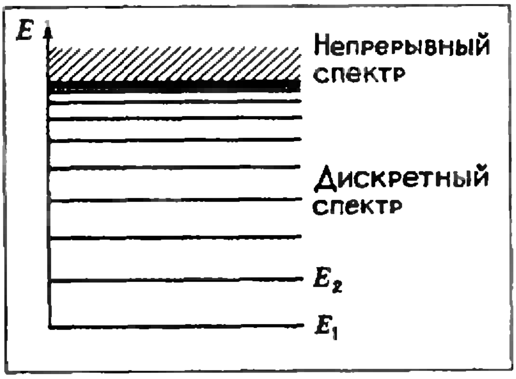


Рис. 5.

В атоме водорода электрон удерживается вблизи ядра силами электростатического притяжения. Если состояние электрона таково, что у него не хватает энергии преодолеть притяжение и уйти на бесконечно большое расстояние от ядра, то он обладает дискретным спектром. Однако, если каким-либо способом сообщить электрону достаточную энергию (это можно сделать, например, освещая атом светом), то электрон преодолеет притяжение к протону и может уйти от него сколь угодно далеко. Начиная с этой энергии, спектр электрона становится непрерывным, то есть энергия электрона может принимать любые значения.

На рисунке 5 изображены возможные значения энергии электрона в атоме водорода. Наинизший возможный уровень энергии называется нормальным или основным. В разобранном выше примере с электроном, «бегающим» между двумя стенками, основному уровню соответствует значение числа n, равное 1. Формула (*) для уровней энергии оказывается довольно полезной для оценки энергии основного состояния и других квантовых систем. В этом случае под L следует понимать размер доступной области пространства, в которой движется электрон. Например, диаметр атома водорода равен приблизительно 10^{-8} *см*, масса электрона $\approx 9\cdot10^{-28}$ *г*. Подставляя эти значения в формулу (*), получим для энергии основного состояния атома водорода $E_1 = 0{,}6 \cdot 10^{-10}$ *эрг*=37,5 *эв*. Точное значение этой энергии 13,5 *эв*, то есть мы ошиблись почти в три раза. Но ведь это именно оценка, грубая прикидка, которая дает представление только о порядке интересующей нас величины.

В заключение следует подчеркнуть, что события, происходящие в микромире на уровне атомов, молекул и атомных ядер, стали понятными лишь после того, как появилась идея о волновой природе микрочастиц. Их двойственная природа (с одной стороны, — это частицы, с другой волны) не имеет аналогий в привычном нам макроскопическом мире, поэтому было бы бесполезно пытаться представить себе, например, на что похож электрон, движущийся в атоме. Он не похож ни на что, известное нам до сих пор. Электрон обладает одновременно и свойствами частиц, и волновыми свойствами, но не является ни частицей в обычном смысле слова, ни обычной волной. Говорить об электроне как о частице можно лишь приближенно, не забывая о его волновых свойствах. Например, для обычной, классической частицы можно точно задать ее координату, импульс, энергию в любой момент времени. Что можно сказать об этих параметрах при описании поведения микрочастиц?

Согласно формуле де Бройля частице, обладающей данным импульсом, то есть **определенным** значением скорости, соответствует волна **определенной** длины. Определенным значением длины волны характеризуются только гармонические волны. Но гармоническая волна безгранична в пространстве. Значит, мы не можем говорить о локализации, о пространственных координатах микрочастицы в данный момент времени.

Если же мы считаем, что частица локализована в пространстве, то тем самым мы ограничили область, в которой сосредоточен колебательный процесс, описываемый волновыми свойствами данной частицы. Но описать такие колебания одной гармонической волной определенной длины нельзя. Следовательно, согласно соотношению де Бройля ничего нельзя с определенностью сказать об импульсе частицы в тот момент времени, в который мы считаем зафиксированными ее координаты.

Таким образом, нет смысла говорить об одновременных точных значениях координат и импульса микрочастицы. Эти параметры могут быть определены в один и тот же момент времени лишь приблизительно, с определенной степенью точности. В 1927 году немецкий физик Вернер Гейзенберг показал, что между неточностями Δx и Δp в определении координаты и импульса микрочастицы в данный момент времени существует следующее соотношение:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant h\ ^{*)}.$$

Это соотношение называется соотношением неопределенностей.

Сегодня мы не можем ответить на вопрос, почему мир микрочастиц устроен именно так, а не иначе, да и вряд ли такой вопрос относится к числу правильно поставленных. Но мы теперь твердо знаем, что самые привычные, кажущиеся незыблемыми представления о природе могут быть опрокинуты потоком новых фактов и наблюдений. Поэтому надо с большой осторожностью относиться ко всякого рода категорическим суждениям о свойствах и законах окружающего нас мира, ибо каждое такое «абсолютное» утверждение основано в действительности на ограниченном человеческом опыте.

---

*) Δp — составляющая полного импульса частицы на соответствующую ось координат. В данном случае — на ось X.

С. Г. Веров

КАСАТЕЛЬНЫЕ К РУЛЕТТАМ

Одним из важнейших достижений XVII века как в области механики, так и в области математики, было осознание глубокой связи между задачей о проведении касательных к кривым и задачей о нахождении скоростей неравномерных криволинейных движений. Выяснилось, в частности, что, исходя из механических соображений, для ряда интересных кривых можно указать элементарные приемы построения касательных. В этой статье рассказывается о двух таких приемах, применимых главным образом при построении касательных к так называемым р у л е т т а м — кривым, по которым движутся точки плоскости, если считать, что вся плоскость движется как «твердая пластина». Хотя основной является задача о касательных, читателю предлагается также несколько других элементарных задач о траекториях движений.

«Некоторые вопросы выяснились для меня первоначально при помощи механического метода, после чего их надо было доказать геометрически, ибо исследование упомянутым методом не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого метода получено известное представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела»

АРХИМЕД

Сначала расскажем о приеме, разработанном Т о р р и ч е л л и (1608—1647) и Р о б е р в а л е м (1602—1675); этот прием основывается на сложении скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки. Если в момент времени t_0 прекратить действие сил, то точка остановится или начнет равномерно двигаться по касательной к траектории (скорость возникающего равномерного движения называется *мгновенной векторной скоростью* исходного движения при $t = t_0$). Это утверждение вытекает из законов Ньютона. Но можно, как это часто делали математики в XVII веке, принять его за кинематическое определение касательной, убедившись, что оно согласуется с наблюдениями над простейшими движениями (прежде всего вращательным). Встав на такую точку зрения, мы сможем строить касательные ко многим интересным кривым, используя при этом лишь простые факты о скоростях.

Будем рассматривать только плоское движение. Зафиксируем на плоскости точку O — начало отсчета. Если движущаяся точка в момент времени t занимает положение A_t, то через $\mathbf{r}(t)$ обозначим вектор $\overrightarrow{OA_t}$. Задание векторов $\mathbf{r}(t)$ для всех значений t полностью определяет движение. Мгновенную векторную скорость в момент времени t обозначим через $\dot{\mathbf{r}}(t)$; напомним, что *вектор* $\dot{\mathbf{r}}(t)$ *направлен по касательной к траектории движения*. Его длина $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ называется *величиной* скорости. Если движение происходит по фиксированной прямой, на которой введены координаты, то векторы $\dot{\mathbf{r}}(t)$

и $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлены по этой прямой, и их можно характеризовать координатами $s(t)$ и $\dot{s}(t)$.

Пример 1. Галилей показал, что для прямолинейного движения $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, скорость будет равна $\dot{s}(t)=gt$.

Пример 2. Пусть точка, находящаяся на расстоянии R от точки O, равномерно вращается вокруг O. Тогда вектор $\dot{r}(t)$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка, в сторону, соответствующую направлению вращения, и $|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\frac{2\pi R}{T}$, где T — период вращения (время полного оборота). В частности, при $T=2\pi$ имеем

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|=|\mathbf{r}(t)|=R.$$

Закон сложения скоростей

Пусть имеется два движения $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Назовем их *суммой* движение, для которого $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)$, где справа стоит векторная сумма. Закон сложения скоростей утверждает, что скорость движения $\dot{\mathbf{r}}(t)$ равна $\dot{\mathbf{r}}_1(t)+\dot{\mathbf{r}}_2(t)$, то есть сумме (векторной) скоростей составляющих движений. Закон сложения скоростей легко установить для суммы движений с постоянными скоростями; общий же случай получается из этого частного случая предельным переходом.

Всякое движение $\mathbf{r}(t)$ может быть представлено в виде суммы двух прямолинейных движений. Для этого достаточно ввести любую декартову систему координат так, чтобы $O=(0, 0)$ и рассмотреть изменение со временем координат $x(t)$, $y(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$. Очевидно, что исходное движение $\mathbf{r}(t)$ и будет суммой движений $x(t)$ и $y(t)$ по координатным осям. Скорости этих движений $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ являются компонентами вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$ (в силу закона сложения скоростей).

Рассмотрим пример 2 при $R=1$, $T=2\pi$, и пусть вектор $\mathbf{r}(0)$ направлен по положительному направлению оси x. Тогда $\mathbf{r}(t)=(\cos t, \sin t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t, \cos t)$, и мы получаем, что $\dot{s}(t)=-\sin t$, если $s(t)=\cos t$, и $\dot{s}(t)=\cos t$, если $s(t)=\sin t$. Читатель, знакомый с дифференцированием, безусловно, заметит, что выявился очень простой кинематический смысл формул для *производных* $\sin t$ и $\cos t$.

Кинематическое определение касательной к параболе

Галилей (1564—1642) обнаружил, что если тело бросить под углом к горизонту, то оно летит по параболе. При доказательстве этого факта Галилей исходил из предположения, что такое движение является суммой равномерного движения по инерции и свободного падения. Однако Галилей не воспользовался своими вычислениями для построения касательной к параболе. Сделал это Торричелли. В приводимых ниже задачах 1, 2 сформулирован его результат.

Задача 1. Докажите, что касательная, проведенная в точке A_t траектории горизонтально брошенного тела: $A_t=(x(t), y(t))=(vt, -gt^2/2)$, соединяет эту точку с точкой $(0, -y(t))=(0, gt^2/2)$.

Все вычисления легко обобщаются на случай тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью (u, v). В этом случае движение разбивается на движение $\{x_1(t)=ut,\ y_1(t)=vt\}$ с постоянной скоростью (u, v) и свободное падение $\{x_2(t)=0,\ y_2(t)=-gt^2/2\}$. Поэтому результирующее движение записывается так: $\{x(t)=ut, y(t)=vt-gt^2/2\}$ (при сложении векторов с началом в 0 координаты их концов складываются).

Задача 2. Докажите, что касательная к параболе, по которой летит тело, брошенное со скоростью (u, v), соединяет точку касания $(x(t), y(t))$ с точкой $(0, -y_2(t))=(0, gt^2/2)$.

Заметим, что указанный Торричелли способ построения касательных к параболе был известен и раньше; однако его кинематическая интерпретация, безусловно, поучительна.

Касательная к циклоиде

Циклоидой Галилей назвал кривую, которую описывает точка, лежащая на границе круга, катящегося по прямой (рис. 1); название означает — «происходящая от круга».

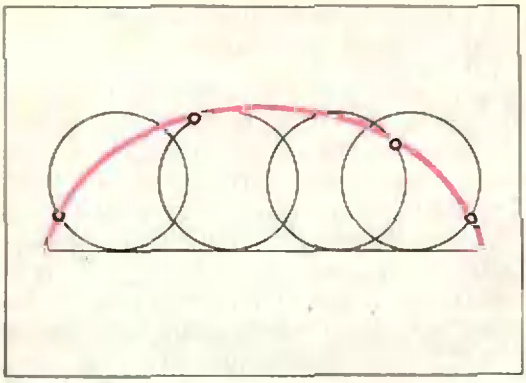


Рис. 1. Циклоида.

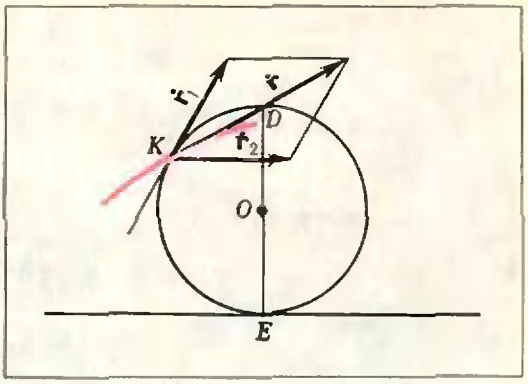


Рис. 3.

Во Франции циклоиду независимо от Галилея открыл Мерсенн (1588—1648); здесь ее называли *рулеттой* или *трохоидой*. Крупнейшие ученые и Италии, и Франции (Торричелли, Вивиани (1622—1703), Ферма (1601—1665), Декарт (1596—1650), Роберваль) решали разнообразные задачи о циклоиде. Вероятно, первым касательную к циклоиде построил Вивиани. Однако, поскольку циклоида определялась кинематически, естественно было найти такой способ построения касательной к ней, который исходил бы из кинематических соображений. Это сделали Роберваль и Торричелли.

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) O — центр *производящего* (катящегося) *круга*, а наблюдаемая точка A является точкой, в которой производящий круг касается *направляющей прямой* l. Очевидно, что движение точки A является периодическим; поэтому достаточно наблюдать за ней лишь до тех пор, пока она вновь не попадет на прямую l. Пусть, далее, в момент t наблюдаемая точка занимает положение A_t, а с прямой l соприкасается точка B_t (рис. 2). Тогда длина отрезка AB_t должна быть равна длине дуги B_tA_t. *Примем это равенство за определение качения без скольжения.*

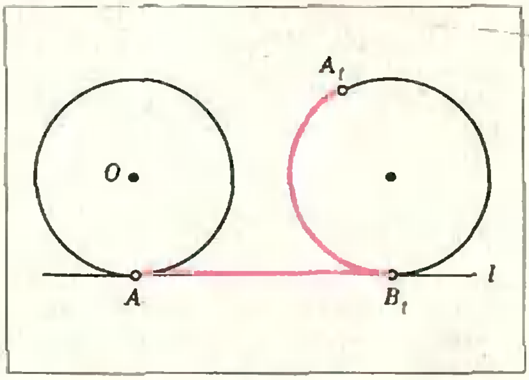


Рис. 2.

Наше движение можно рассматривать как сумму вращательного ($\mathbf{r}_1(t)$)— вокруг O, — и поступательного ($\mathbf{r}_2(t)$) — вдоль прямой l, причем движения эти происходят таким образом, что в каждый момент времени пройденные пути оказываются одинаковыми ($s(t)$). Закон изменения пути $s(t)$ можно задавать по-разному; от этого будет зависеть характер движения, но траектория (циклоида), а вместе с ней и интересующие нас касательные, меняться не будут. Выберем самый простой закон изменения: $s(t)=ct$. Тогда оба движения, и поступательное и вращательное, будут равномерными с одинаковой величиной скорости $|\dot{\mathbf{r}}_1(t)| = |\dot{\mathbf{r}}_2(t)| = c$ (см. пример 2)*).

Найдем скорость результирующего движения. Пусть в момент времени t точка занимает положение $A_t = K$ (рис. 3). Вектор $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ направлен по касательной к границе производящего круга, вектор $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$— горизонтально; длины их одинаковы. По правилу параллелограмма

*) Имеем $c = \dfrac{2\pi R}{T}$, где R — радиус производящего круга, T — время его полного оборота. В частности, если $T=2\pi$, то $c = R$.

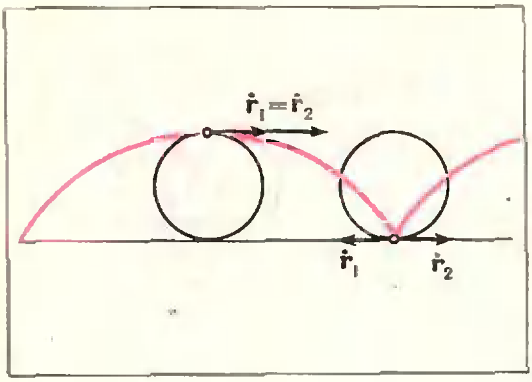


Рис. 4.

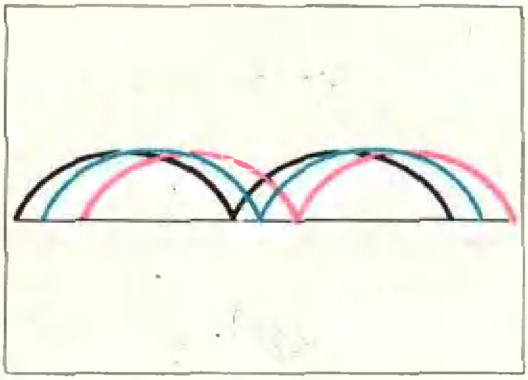


Рис. 5.

(в данном случае это ромб) находим искомую скорость $\dot{\mathbf{r}}(t)$, а значит, и касательную к циклоиде.

Задача 3. Докажите, что касательная к циклоиде в точке K соединяет эту точку с верхней точкой D производящего круга при его соответствующем положении.

(Для решения задачи нужно доказать лишь простой геометрический факт: вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по прямой KD.)

Заметим, что величина скорости $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ не постоянна: она максимальная, когда точка занимает наивысшее положение (при этом векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ лежат на одной прямой и совпадают по направлению), и равна нулю, когда точка попадает на прямую l (в этом случае векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ противоположны(рис. 4)).

Можно показать, что равенство нулю скорости в точках соприкосновения круга и прямой во все моменты времени эквивалентно принятому ранее определению качения без скольжения.

Итак, получаем, что там, где циклоида имеет заострения, скорость наблюдаемой точки обращается в нуль. Оказывается, что, вообще, какова бы ни была траектория, в точках ее заострения скорость всегда равна нулю. Иногда говорят, что траектория не может «сломаться» на ненулевой скорости. Принято считать, что в точках заострения у кривых нет касательных. Все сказанное здесь нуждается в серьезных уточнениях, но мы этого делать не будем.

Нормалью к кривой в точке A называется прямая, проходящая через A перпендикулярно к касательной в этой точке.

Из задачи 3 следует, что нормаль к циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга (точку E на рисунке 3; угол DKE — прямой, так как опирается на диаметр).

Укороченные циклоиды

Пока мы следили только за одной (фиксированной) граничной точкой производящего круга; однако ясно, что и другие граничные точки будут двигаться по таким же циклоидам, только сдвинутым вдоль прямой l (рис. 5). Проследим теперь за траекториями внутренних точек круга. Возникающие кривые называются *укороченными циклоидами* (рис. 6); они характеризуются отношением $k = \frac{\rho}{R}$, где R — радиус производящего круга, ρ — расстояние от центра

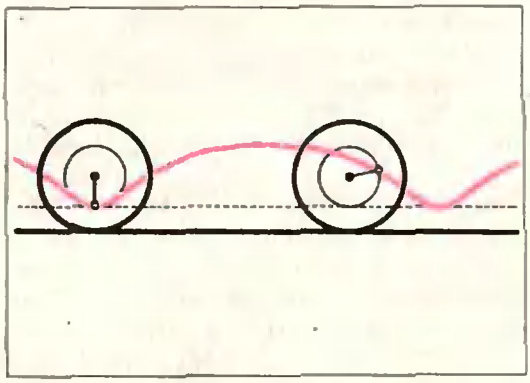


Рис. 6. Укороченная циклоида.

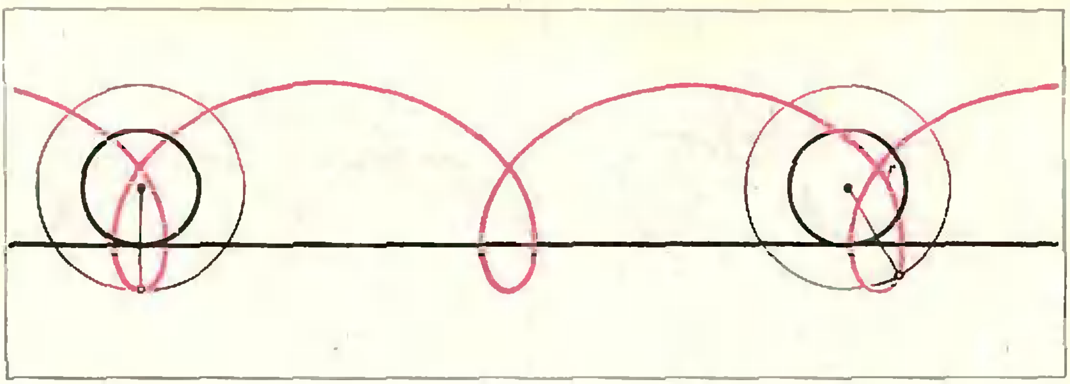


Рис. 7. Удлиненная циклоида.

круга до наблюдаемой точки. При $k = 0$ получаем прямую, по которой движется центр круга, а при $k = 1$ — циклоиду.

Задача 4. Докажите, что нормаль к укороченной циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга.

Заметим, что точка, движущаяся по укороченной циклоиде, нигде не имеет нулевой скорости. В нижней точке скорость направлена горизонтально и ее величина равна $R-\rho$. Это означает, что к качению окружности радиуса ρ добавляется скольжение со скоростью $R-\rho$ (поступательное движение).

Удлиненные циклоиды

Вовлечем в качение круга его внешние точки (можно представить себе, что на колесо, движущееся по рельсу, одет обод). Эти точки движутся по кривым, которые называются *удлиненными циклоидами* (рис. 7). Все рассуждения, которые ранее были приведены для укороченных циклоид, дословно переносятся на удлиненные. Здесь только $k = \frac{\rho}{R} > 1$. Заметим лишь, что в нижней точке удлиненной циклоиды скорость направлена в сторону, противоположную движению круга ($|\dot{\mathbf{r}}_1| = \rho$, $|\dot{\mathbf{r}}_2| = R$, $\rho > R$).

Обращали ли вы внимание на то, что нижние точки обода колеса вагона движутся назад?

Мгновенный центр вращения

Итак, мы вовлекли в качение круга по прямой все точки плоскости. Каждая точка движется по своей траектории, но все эти траектории согласованы, так как движущиеся точки составляют твердое тело. Характеристическим свойством твердого тела с точки зрения кинематики является то, что при движении расстояния между всеми его точками остаются неизменными. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь таких движений твердых пластин, которые можно производить, не выводя пластины из плоскости (запрещается, например, их переворачивать). Нас будет интересовать, какие ограничения накладывает на скорости точек пластины условие твердости (заметим, что вопрос о движении трехмерных твердых тел намного сложнее рассматриваемой нами плоской задачи).

Вот некоторые закономерности движения твердых пластин.

Принцип вовлечения. *Движение твердой пластины однозначно определяется движениями любых двух ее точек. Движение двух различных точек, при котором сохраняется расстояние между ними, можно, и притом единственным образом, продолжить до движения всей плоскости как твердой пластины.* Это утверждение носит чисто геометрический характер. Мы не будем приводить его доказательства, ограничившись наглядными пояснениями. Во-первых, движение прямолинейного стержня полностью характеризуется движением двух его точек, а, во-вторых, если треугольник составлен из жестких стержней, то движение одного из них однозначно приводит в движение весь треугольник. В результате в движение двух точек, A, B, можно вовлечь прямую AB, а затем всякую точку C вне AB.

Принцип инерции. *Если на твердую пластину не действуют никакие внешние силы (а лишь внутренние силы, обеспечивающие твердость), то она совершает равномерное прямолинейное или равномерное вращательное движение.*

При рассмотрении произвольных движений пластин нам потребуется еще один фундаментальный принцип механики. *Скорость не может измениться мгновенно* (для изменения скорости требуется ненулевое время). В частности, если в момент времени t_0 изменить силы, действовавшие на движущуюся точку, то скорость $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ не изменится, а значит, если $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, не изменится и касательная к траектории в момент t_0 (хотя сама траектория начиная с этого момента может стать иной).

Пусть в момент времени t_0 на движущуюся твердую пластину перестали действовать внешние силы. Тогда, с одной стороны, скорости точек в момент времени t_0 останутся прежними, а, с другой стороны, движение должно подчиняться сформулированному принципу инерции. *Поэтому при движении твердой пластины в каждый момент времени t может иметь место лишь одна из двух возможностей:*

а) скорости всех точек равны (как векторы);

б) существует единственная точка O_t, в которой скорость равна нулю; в произвольной же точке A пластины скорость направлена перпендикулярно к вектору O_tA, а ее величина пропорциональна расстоянию от A до O_t. (Коэффициент пропорциональности зависит только от момента времени t и не зависит от A.)

Из того, что скорость не может измениться мгновенно, нетрудно вывести, что переход от ситуации *а*) к *б*) и наоборот возможен лишь в те моменты, когда пластина останавливается (скорости всех точек равны нулю). Поэтому в промежутках между остановками либо всюду имеет место ситуация *а*), либо всюду *б*). Можно показать, что в случае *а*) траектория любой точки A получается из траектории некоторой точки B параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BA}$. Мы будем рассматривать случай *б*) (то есть считать, что в каждый момент времени имеется единственная точка O_t с нулевой скоростью). Будем называть O_t *мгновенным центром вращения в момент t*. (В примере с качением круга по прямой мгновенным центром вращения является точка соприкосновения круга с направляющей прямой.)

Если известен мгновенный центр вращения O_t, то нормали к траекториям в момент времени t (прямые O_tA_t), а следовательно, и касательные, строятся автоматически. Наоборот, если в момент t известны скорости двух точек пластины, то взяв точку пересечения нормалей к этим скоростям, мы получим мгновенный центр вращения O_t.

Пусть теперь твердая пластина движется по неподвижной плоскости. Рассмотрим на этой плоскости кривую L, составленную из мгновенных центров вращения во все моменты времени; кривую L называют *неподвижным центроидом*; мы будем называть ее *«рельсом»*. С другой стороны, рассмотрим на пластине кривую C, составленную из всех таких точек, которые оказываются мгновенными центрами вращения в какие-то моменты времени; C называют *подвижным центроидом*; мы будем называть C *«колесом»*. Введенные «несерьезные» термины, вероятно, подсказали вам, что исход-

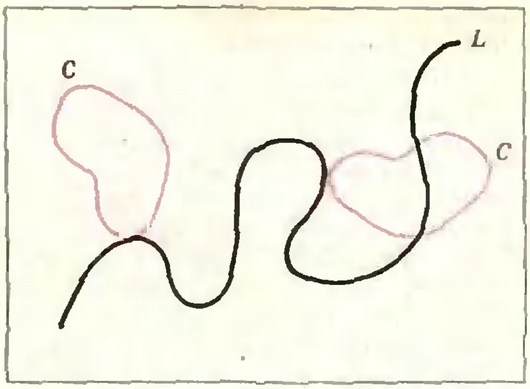


Рис. 8. «Неподвижный рельс» (L) и «колесо» (C).

ное движение можно получить, если рассмотреть качение **без скольжения** нашего кривого «колеса» по кривому «рельсу» и вовлечь в это качение остальные точки (рис. 8). Будем при этом считать, что отсутствие скольжения означает равенство нулю мгновенных скоростей в точках соприкосновения «колеса» и направляющего «рельса» во все моменты времени (это согласуется с *определением* мгновенного центра вращения). Отсюда можно вывести равенство длин дуги «колеса» и соответствующей дуги направляющего «рельса» (по которой эта дуга «колеса» прокатилась). При этом разрешается, чтобы при качении «колесо» пересекало «рельс».

Часто под **рулеттами** понимают траектории, которые описывают точки плоскости при ее движении как твердой пластины с условием (6) во все моменты времени, то-есть при некотором качении. Ко всем рулеттам мы научились проводить нормали и касательные. При этом оказалось, что не нужно даже уметь проводить касательные к «колесу» и «рельсу» (это было бы необходимо, если пользоваться сложением скоростей). В наших механических рассмотрениях мы вышли за пределы XVII века; замечательно, однако, что способ проведения нормалей к общим рулеттам открыл Декарт, определявший их при помощи качения (не зная, конечно, сколь общий характер носят движения, порожденные качениями).

Эпициклоиды

Рассмотрим теперь рулетты, получающиеся при качении круга по кругу. Пусть круг радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R. Траектории граничных точек катящегося круга («колеса») называются *эпициклоидами*. Их вид зависит от $k = \frac{R}{r}$ (рис. 9). Если k — целое, то подвижный круг, прокатившись один раз по границе неподвижного, сделает k оборотов и эпициклоида будет иметь k остриев и k арок. Эпициклоиду при $k = 1$ называют *кардиоидой* (она напоминает стилизованное изображение сердца). Если $k = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то подвижный круг, сделав q оборотов, p раз прокатится по неподвижному. Если же k будет иррациональным числом, то никакой периодичности не будет, и наблюдаемая точка никогда не вернется в исходное положение.

Можно доказать, что получающаяся в этом случае бесконечная траектория заполняет кольцо $\{R \leqslant OA \leqslant R+r\}$, подходя сколь угодно близко к любой его точке, но не в каждую попадая.

Касательные к эпициклоидам легко строятся с помощью мгновенного центра вращения — точки соприкосновения кругов. Докажите, что касательная к эпициклоиде (в некоторой точке) проходит через точку соответствующего подвижного круга, диаметрально противоположную точке соприкосновения с неподвижным.

Замечание. При построении эпициклоид и решении задач нужно помнить следующее. Если A — начальное положение наблюдаемой точки (рис. 10), а в некоторый момент времени подвижный круг касается неподвижного в точке B, то эпициклоиде принадлежит такая точка его границы C, что *дуга BA равна по длине дуге BC*; учитывая разницу радиусов, получаем

$$\frac{\smile BC}{\smile BA} = \frac{R}{r} = k.$$

Траектории движения внутренних (соответственно внешних) точек подвижного круга при рассматриваемом качении называются **укороченными** (соответственно **удлиненными**) **эпициклоидами** (рис. 11; мы ограничиваемся целыми k).

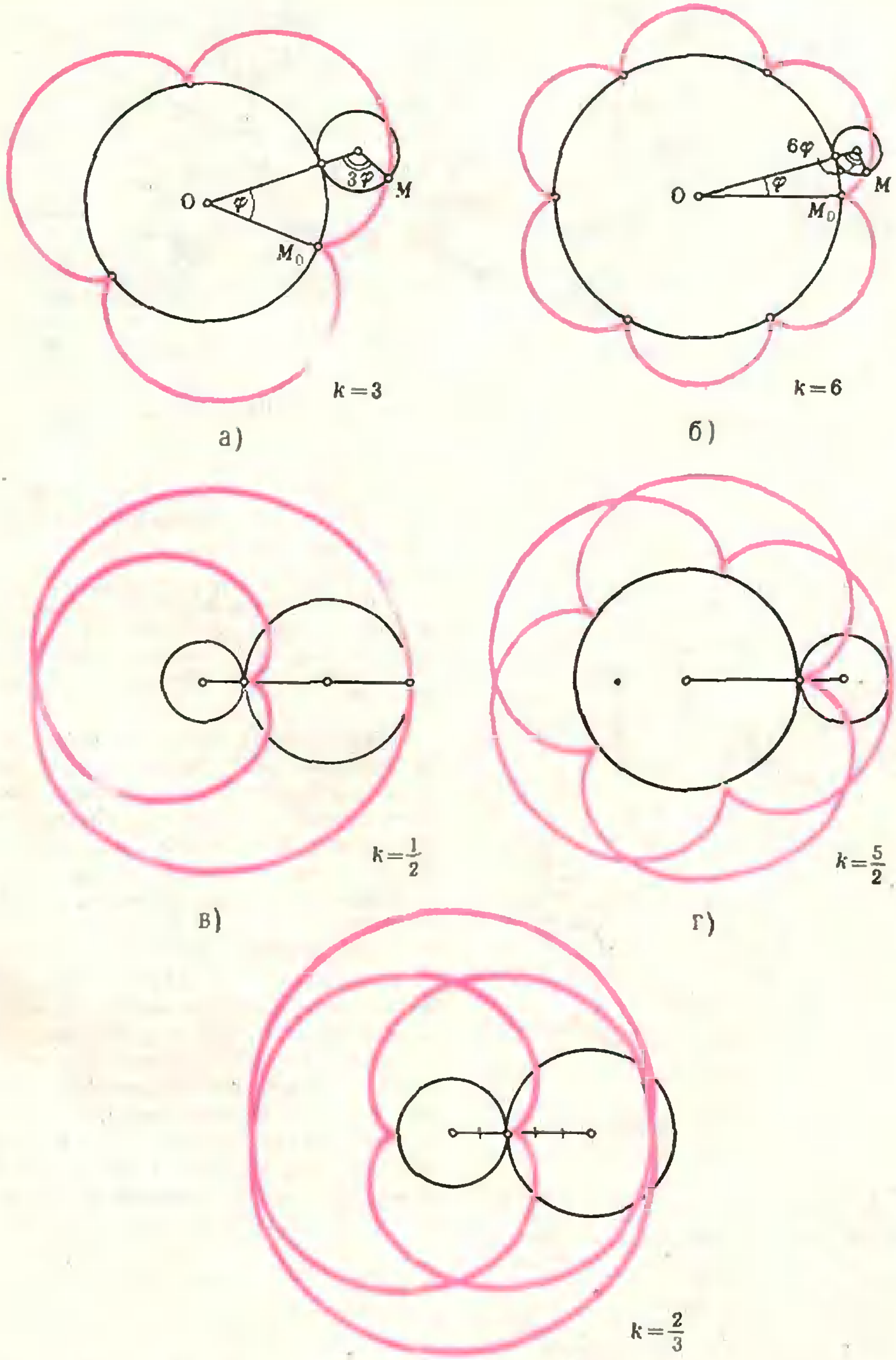


Рис. 9. Эпициклоиды.

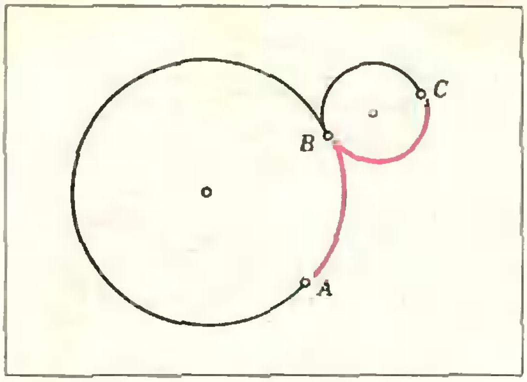


Рис. 10.

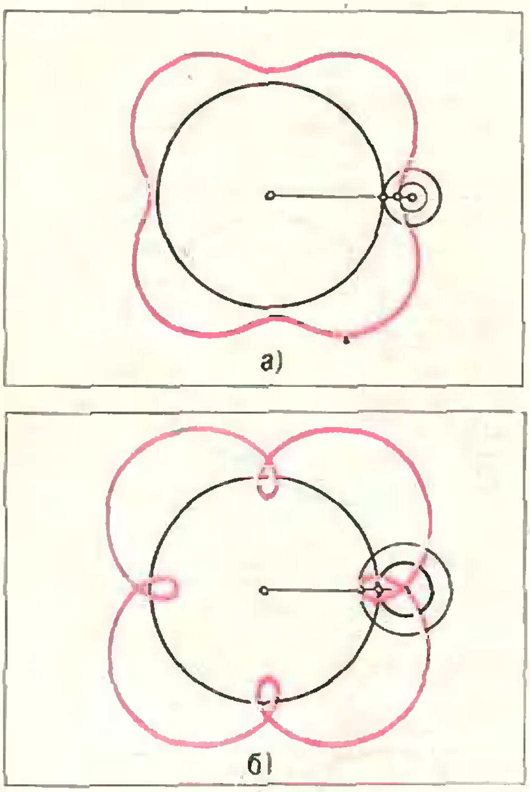


Рис. 11. Укороченные и удлиненные эпициклоиды.

Задача 5. Пусть точка A равномерно вращается вокруг точки O_1, в свою очередь равномерно вращающейся вокруг точки O; $|OO_1| = r_2$, $|O_1A| = r_1$. Пусть оба вращения происходят по часовой стрелке; v_1 и v_2 — величины линейных скоростей. Покажите, что движение точки A будет происходить по какой-то эпициклоиде (быть может, укороченной или удлиненной). Какими соотношениями определяется характер кривой?

Гипоциклоиды

Рулетты, получающиеся при качении круга радиуса r по внутренней стороне окружности радиуса $R > r$, называются *гипоциклоидами* (соответственно *удлиненными* и *укороченными*).

Если $r > R$, то можно в качестве аналога такого движения рассмотреть качение обруча радиуса r, внутренней стороной касающегося границы неподвижного круга радиуса R. Соответствующие рулетты называются перициклоидами. Но оказывается, что они совпадают с эпициклоидами (см. «Квант», 1975, № 1, задача М261).

Вид гипоциклоид зависит от арифметической природы $k = \frac{R}{r}$, и читатель легко разберется с этим самостоятельно по аналогии с эпициклоидами.

Задача 5′. Пусть вращения, описанные в задаче 5, происходят в противоположных направлениях (одно — по, а другое — против часовой стрелки). По каким траекториям будет при этом двигаться точка A?

Подчеркнем в заключение, что мы не ставили перед собой цели строго доказать все результаты, полученные нами из кинематических соображений. В некоторых случаях это сделать просто: механические рассуждения заменяются математическими почти автоматически (для этого оказывается достаточно скорости заменить производными). В других случаях такие «заменители» найти сложнее (например, там, где рассматривается движение пластин, или изменяются силы). Однако чисто математические рассмотрения не могут полностью заменить механическую интерпретацию, во многих случаях дающую возможность увидеть простой и красивый ответ.

И. Н. БРОНШТЕЙН

ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Конические сечения.

В статьях «Эллипс», «Гипербола» и «Парабола» *) эти кривые определялись по-разному: первая — как результат растяжения или сжатия окружности, а вторая и третья — как графики некоторых функций. Каждая из них имеет свое фокальное свойство, которое часто принимается за определение кривой. Напомним эти «фокальные определения» (предполагается, что все рассматриваемые точки для каждой линии лежат в одной плоскости):

Эллипс — это множество всех точек, сумма расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Гипербола — множество всех точек, разность расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Парабола — множество всех точек, одинаково удаленных от точки (фокуса) и от не проходящей через нее прямой (директрисы).

Древнегреческий математик Менехм, открывший эти кривые, определял их иначе: как сечения кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих. Он назвал полученные кривые *сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов*, в зависимости от осевого угла конуса. Первое, как мы увидим ниже, представляет собой эллипс, второе — параболу, третье — одну ветвь гиперболы (рис. 1, а, б, и в). Названия «эллипс», «гипербола» и «парабола» были введены Аполлонием *). До нас дошло почти полностью (7 книг из 8) сочинение Аполлония «О конических сечениях». В этом сочинении Аполлоний рассматривает обе полы конуса (рис. 2) и пересекает конус плоскостями, не обязательно перпендикулярными к одной из образующей.

Т е о р е м а. *Если плоскость сечения пересекает все образующие конуса (только одну его полу), то линия пересечения* (красная линия на рисунке 2) — *эллипс;*

если плоскость параллельна одной образующей (и тоже пересекает одну полу), то линия пересечения (синяя) — *парабола;*

если плоскость параллельна двум образующим (пересекает обе полы), то линия пересечения (черная) — *гипербола.*

Изящное доказательство этой теоремы было предложено в 1822 году бельгийским инженером Данделеном, использовавшим сферы, которые принято теперь называть *сферами Данделена.*

Э л л и п с. Впишем в конус две сферы, касающиеся плоскости сече-

*) См. «Квант», 1975, № 1, 3 и 4. Предполагается, что читатель знаком с этими статьями.

*) А п о л л о н и й   П е р г с к и й — один из трех великих геометров древности (Евклид, Архимед, Аполлоний), жил около 200 г. до нашей эры; работал в Александрии.

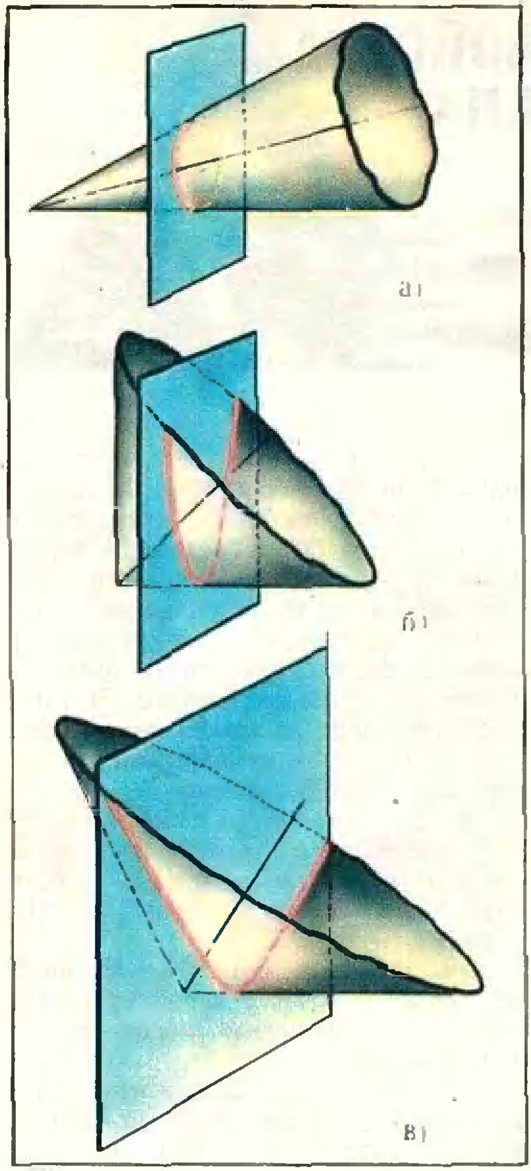


Рис. 1.

ния П с разных сторон (рис. 3, а, б). Обозначим через F_1 и F_2 точки касания этой плоскости со сферами. Возьмем на линии сечения конуса плоскостью П произвольную точку M. Отметим на образующей конуса, проходящей через M, точки P_1 и P_2, лежащие на окружностях k_1 и k_2, по которым сферы касаются конуса. Ясно, что $MF_1 = MP_1$ как отрезки двух касательных к первой сфере, выходящих из M; аналогично, $MF_2 = MP_2$. Следовательно,

$$MF_1 + MF_2 = MP_1 + MP_2 = P_1P_2.$$

Длина отрезка P_1P_2 — одна и та же для всех точек M нашего сечения: это — образующая усеченного конуса, ограниченного параллельными плоскостями I и II, в которых лежат окружности k_1 и k_2. Следовательно, линия сечения конуса плоскостью П — эллипс с фокусами F_1 и F_2.

Гипербола. Этот случай аналогичен только что разобранному. Читателю предлагается доказать, пользуясь рисунком 4, а, б, что в сечении получается гипербола.

Парабола. Этот случай рассмотрен в статье «Парабола» *), исходя из аналитического определения этой кривой. Но можно провести и рассуждение со сферой Данделена (рис. 5).

*) «Квант», № 4, с. 16.

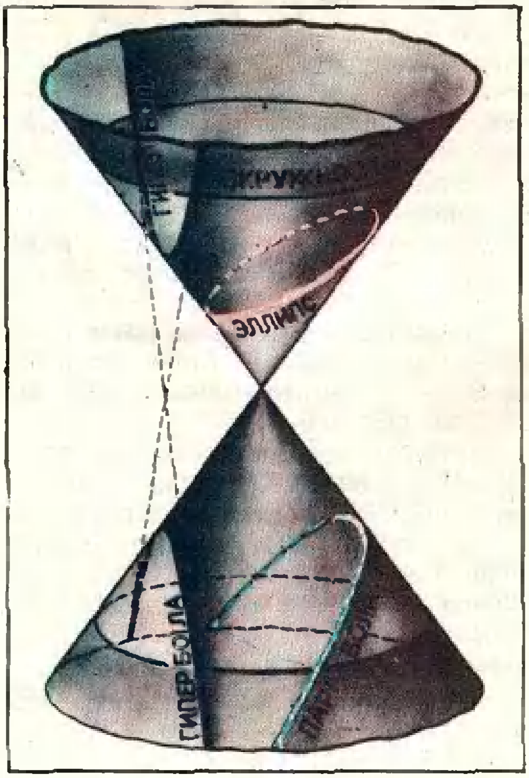


Рис. 2.

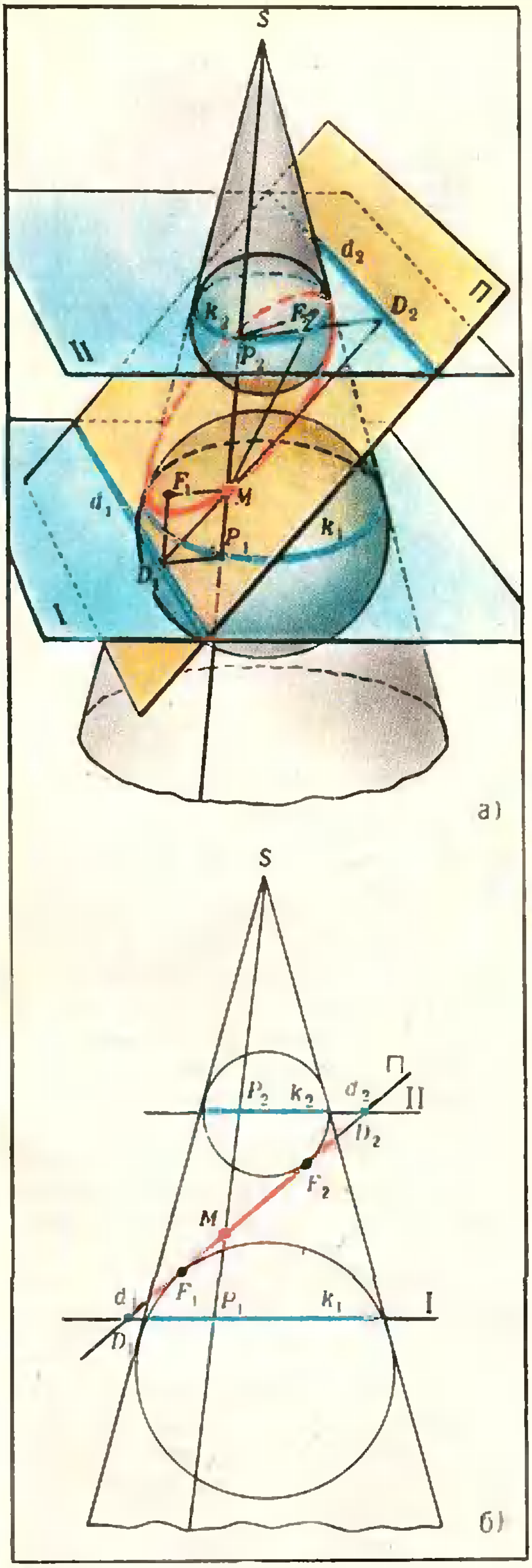

S
d2
П
D2
k2
F2
II
P2
F1
M
d1
P1
k1
D1
I
а)
S
П
P2
k2
d2
II
D2
F2
M
d1
F1
P1
k1
I
D1
б)

Рис. 3.

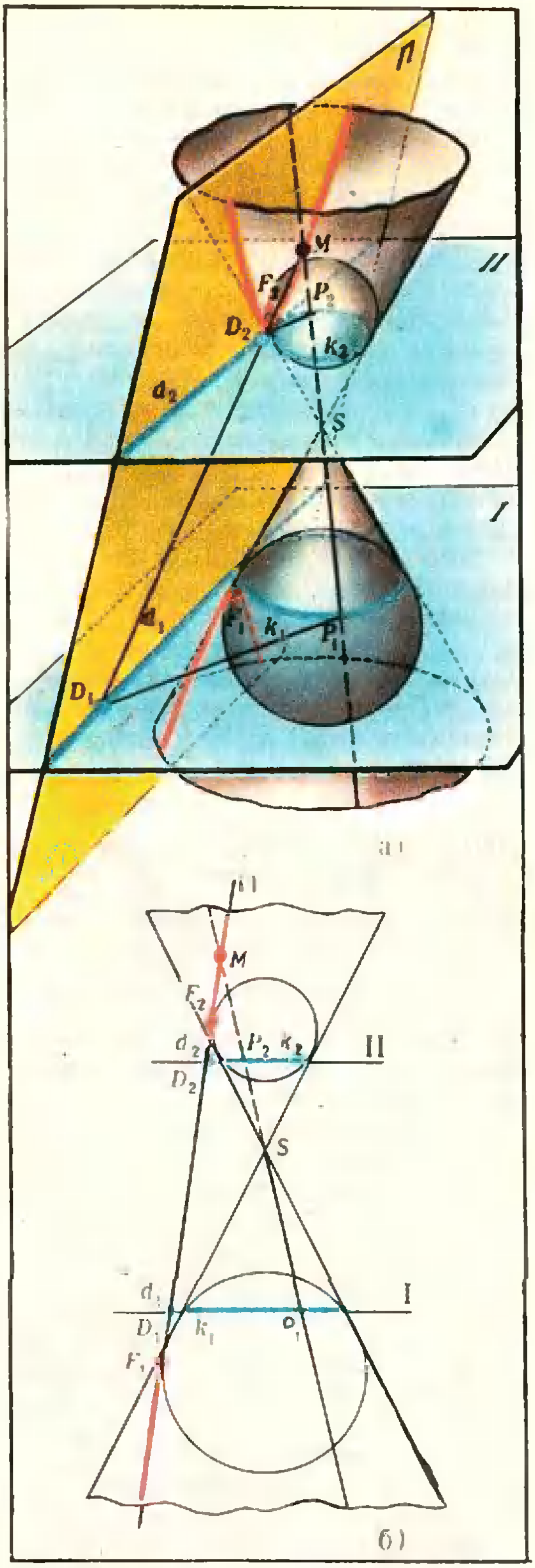

П
M
II
F2
P2
D2
k2
d2
S
I
d1
F1
k1
P1
D1
M
F2
d2
P2
k2
II
D2
S
d1
I
D1
k1
F1
б)

Рис. 4.

Плоскость П пересекает круговой конус параллельно образующей Sl. Впишем в конус сферу, касающуюся плоскости П. Точка касания F и есть фокус. Конус и сфера соприкасаются по окружности k, плоскость I которой пересекает П по прямой d. Это и есть директриса.

Для доказательства проведем через точку M, лежащую на образующей SHM конуса, плоскость II, параллельную I. Она пересечет конус по второй окружности k'. Затем опустим из M перпендикуляр MD на прямую d. Легко видеть, что он параллелен образующей Sl и что фигура $MDEB$ — параллелограмм. Имеем: $MF = MH$ (как две касательные из точки M к сфере); $MH = BE$ (как две образующие усеченного конуса, ограниченного плоскостями I и II); $BE = MD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства $MF = MD$ для любой точки M сечения следует, что это сечение — парабола.

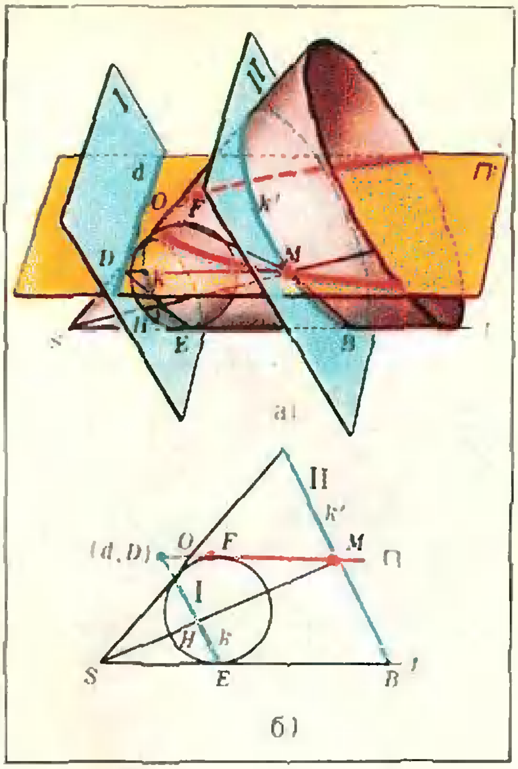


Рис. 5.

Директориальное свойство конических сечений. Эксцентриситет

Фокальному свойству параболы можно придать такую формулировку: отношение $\frac{MF}{MD}$ расстояний любой точки параболы до фокуса F и до директрисы d (рис. 5) — величина постоянная (равная единице).

Аналогичное свойство имеет место также для эллипса и гиперболы. *В плоскости эллипса (гиперболы) для каждого фокуса F существует такая прямая d (директриса), что отношение расстояний от любой точки M эллипса (гиперболы) до фокуса F и до директрисы d — величина постоянная.* Она называется *эксцентриситетом* эллипса (гиперболы) и обозначается греческой буквой ε (эпсилон). Для параболы, таким образом, $\varepsilon = 1$; из дальнейшего выяснится, что для эллипса ε меньше 1, а для гиперболы ε больше 1. У параболы одна директриса, а у эллипса (гиперболы) — две, по одной для каждого фокуса (рис. 6).

Докажем это свойство, например, для эллипса. Директрисы d_1 и d_2 — это линии пересечения плоскости П с плоскостями I и II (см. рис. 3). Для эллипса они расположены вне конуса и, значит, вне кривой. Из подобия треугольников MD_1P_1 ($MD_1 \perp d_1$) и MD_2P_2 ($MD_2 \perp d_2$) имеем: $MP_1 : MD_1 = MP_2 : MD_2$. Обозначим эти отношения через ε. Так как $MP_1 = MF_1$, $MP_2 = MF_2$, то $MF_1 = \varepsilon \cdot MD_1$, $MF_2 = \varepsilon \cdot MD_2$. Складывая эти равенства, получаем

$$MF_1 + MF_2 = \varepsilon\,(MD_1 + MD_2) = \varepsilon \cdot D_1D_2.$$

Но левая часть, по фокальному свойству эллипса, постоянна и равна $2a$, длина D_1D_2 (расстояние между директрисами) тоже постоянна. Значит, $\varepsilon = \text{const}$.

Аналогично проводится рассуждение и для гиперболы.

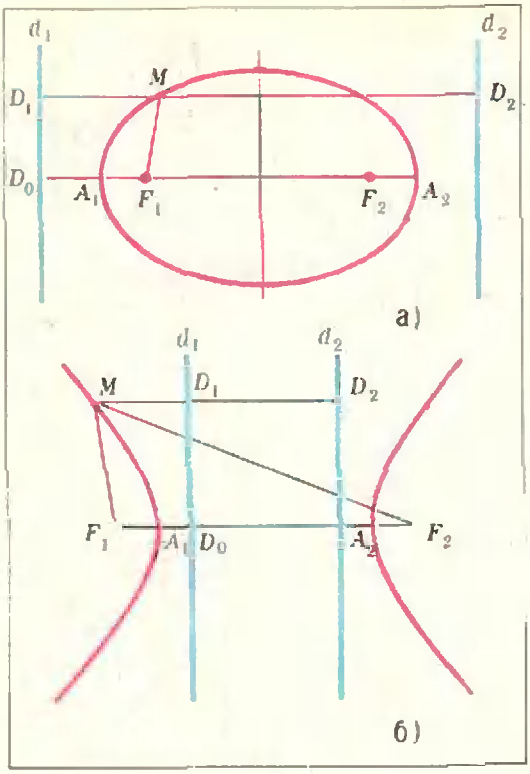


Рис. 6.

Для концов A_1A_2 большой оси эллипса (см. рис. 6, а) имеем по директориальному свойству

$$A_1D_0 = \frac{A_1F_1}{\varepsilon} \text{ и } A_2D_0 = \frac{A_2F_1}{\varepsilon}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$A_1A_2 = \frac{A_2F_1 - A_1F_1}{\varepsilon} = \frac{F_1F_2}{\varepsilon},$$

или, обозначая F_1F_2 через $2c$ (см. «Квант». 1975, № 1, с. 7), $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Такое же равенство справедливо и для гиперболы. Отсюда видно, что для эллипса ε меньше 1, а для гиперболы ε больше 1.

У окружности оба фокуса сливаются в одну точку (центр) и $c = 0$, откуда вытекает, что эксцентриситет окружности равен нулю. Слово «эксцентриситет» происходит от латинских *ex* (вне) и *centrum* (центр); эксцентриситет показывает, насколько фокусы эллипса разошлись друг от друга по отношению к длине $2a$ его фокальной оси, то есть какова растянутость эллипса.

Происхождение названий эллипса и гиперболы. Кривые второго порядка

Назовем *главной хордой* эллипса, гиперболы, параболы ту хорду, которая проходит через фокус перпендикулярно к фокальной оси (так называется ось, проходящая через фокус кривой). У эллипса и гиперболы, в отличие от параболы, по две главные хорды. Длину половины главной хорды будем обозначать буквой p и называть *фокальным параметром* конического сечения *).

Для любой точки M конического сечения построим желтый прямоугольник $ABCD$ (высота которого равна главной хорде) и синий квадрат $NMEH$ (рис. 7, а, б, в). Как мы знаем **), для параболы эти прямоугольник и квадрат имеют одинаковую площадь.

Ниже мы увидим, что для эллипса квадрат имеет меньшую площадь, чем прямоугольник, то есть этот квадрат имеет н е д о с т а т о к (*elleipsis*). Для гиперболы же квадрат имеет большую площадь, чем прямоугольник, то есть имеет и з б ы т о к (*hyperbole*). Этот факт, известный еще Аполлонию, послужил основой для названия обеих кривых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Если, однако, сдвинуть эллипс вправо на a единиц (так, чтобы в начале координат находился не центр, а левый конец фокальной оси эллипса), то в этом новом положении (синий эллипс на рис. 8,а) он будет иметь уже другое уравнение, которое полу-

*) Рекомендуем возобновить в памяти соответствующие сведения о главной хорде и фокальном параметре параболы («Квант», № 4, с. 12).

**) «Квант», № 4, с. 12.

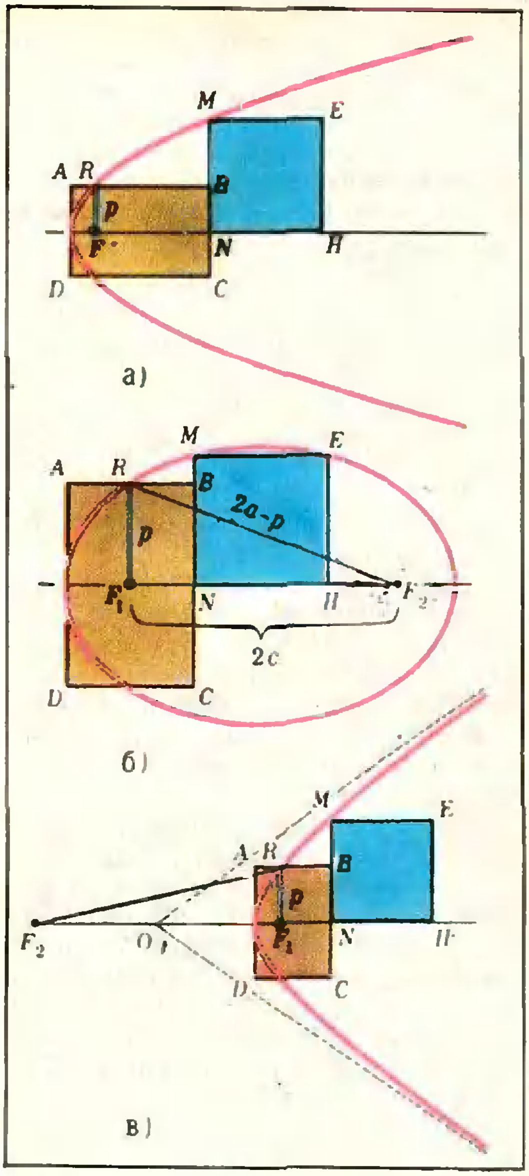


Рис. 7.

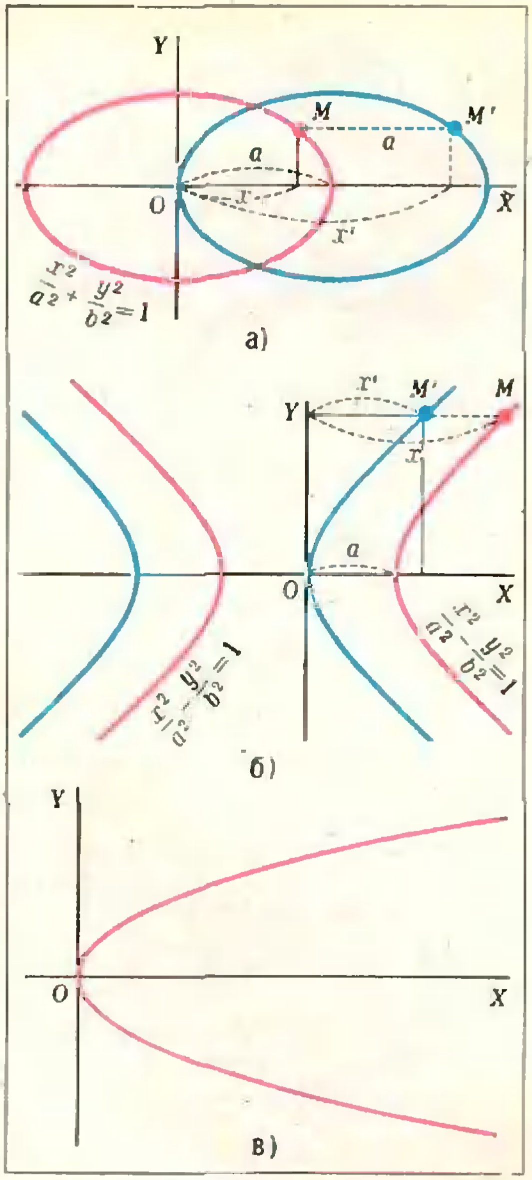


Рис. 8.

чается из прежнего, если в нем x заменить на $x-a$:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

или

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Заметив, что $p=\frac{b^2}{a}$ (это получается непосредственно вычислением; см. рис. 7,б) и $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, мы можем записать это уравнение так:

$$y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2. \qquad (2)$$

Точно к такому же виду приводится уравнение гиперболы (здесь кривая сдвигается так, чтобы в начале координат оказался правый конец фокальной оси (см. рис. 8, б) и x заменяется на $x+a$).

Заметим, что и парабола (рис. 8, в), у которой $\varepsilon=1$, имеет то же уравнение:

$y^2=2px$ *). Таким образом, *все три кривые выражаются одним и тем же уравнением* (2). Оно называется *уравнением относительно вершины*, так как начало координат в этом случае находится в вершине кривой (рис. 9).

Второй член в правой части (2) отрицателен для эллипса, равен нулю для параболы и положителен для гиперболы. Сравнив рисунки 7 и 8, видим, что левая часть в (2) равна площади синего квадрата, а первый член правой части — площади красного прямоугольника. Это и доказывает утверждение, сформулированное выше. Разумеется, у Аполлония оно доказано иначе — не аналитически, а чисто геометрически.

*) В «Кванте» № 4 (с. 13) уравнение параболы было получено в виде $x^2=2py$, а здесь мы пишем его так: $y^2=2px$. Дело в том, что оси координат мы здесь переставили (сравните рисунки 8 в этой статье и 6 в статье «Парабола» в «Кванте» № 4).

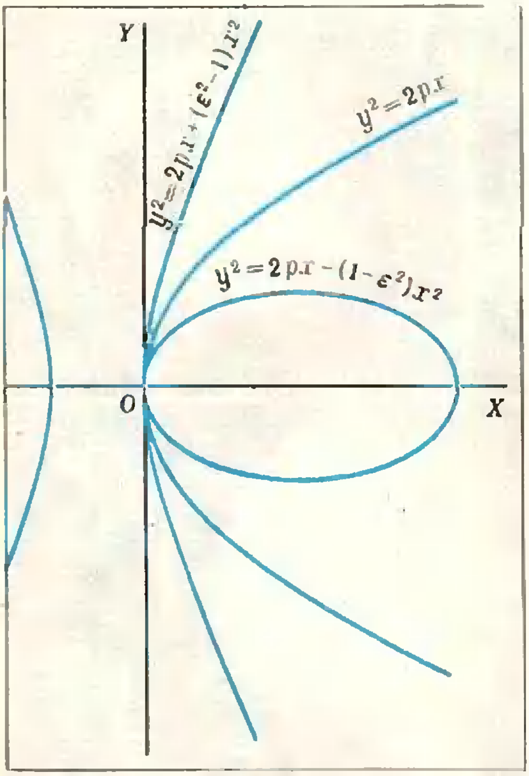


Рис. 9.

Существенно, что уравнение конического сечения (2) — **второй** степени относительно входящих в него переменных. Это относится и к каноническим уравнениям всех трех кривых. Вообще, любая кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вторую степень, то есть

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

является коническим сечением *). Поэтому конические сечения называются также *кривыми второго порядка*.

От эллипсов к гиперболам через параболу

Рассмотрим плоскость П, пересекающую конус по окружности, и возьмем в этой плоскости прямую l, касающуюся этой окружности. Если теперь начать поворачивать плоскость П вокруг прямой l, то она будет

*) Правда, при такой формулировке приходится считать коническим сечением не только кривую линию, но и, например, пару пересекающихся прямых (уравнение $x^2-y^2=0$). Однако это вполне естественно, так как плоскость, проходящая через вершину конуса, может пересекать его по двум прямым, то есть по «вырожденному» коническому сечению.

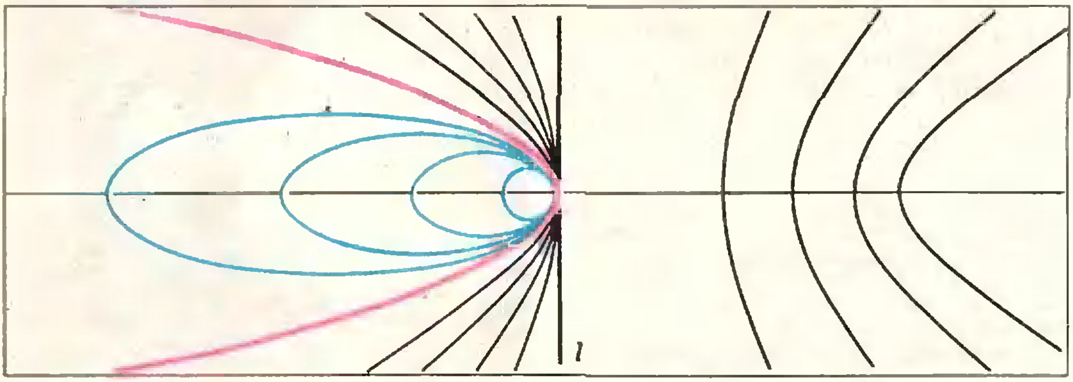


Рис. 10.

пересекать конус по все более вытянутым эллипсам. Наконец (когда поворачивающаяся плоскость окажется параллельной одной из образующих конуса), сечение превратится в параболу, а затем (при дальнейшем вращении плоскости) оно будет представлять собой гиперболу *). На рисунке 10 показаны кривые, постепенно появляющиеся в поворачивающейся плоскости.

Из сказанного ясно, что парабола — это граничный случай между эллипсами и гиперболами. Для окружности ($\varepsilon=0$) второй фокус слит с первым. С увеличением эксцентриситета второй фокус удаляется от первого, но пока ε меньше 1, кривая остается эллипсом, постепенно растягивающимся. При $\varepsilon = 1$ эллипс деформируется в параболу (его второй фокус «уходит в бесконечность»), а дальше (при ε большем 1) второй фокус вновь появится на фокальной оси (с другой стороны, внутри второй ветви гиперболы).

Перемещая и поворачивая лампу, лучи которой ограничены круглым абажуром (рис. 11), мы можем получить контур в виде любого конического сечения, кроме гипербол с большим эксцентриситетом $\left(\varepsilon > \frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

Оптические свойства конических сечений

На рисунке 12 изображена густая сеть из двух серий концентрических окружностей с центрами F_1 и F_2; разность радиусов двух соседних окружностей каждой серии равна d. Сеть разбивает плоскость на маленькие 4-угольники, которые можно считать ромбиками; противоположные стороны «параллельны», а обе «высоты» равны ($=d$). Если, начиная с любого узла M сети, двигаться по диагоналям этих 4-угольников, то траекторией движения в одном направлении будет эллипс, а в другом — одна ветвь гиперболы; вторая ветвь гиперболы получится, если двигаться из узла M', симметричного M. Фокусами обеих кривых будут F_1 и F_2.

Рис. 11.

*) Несложные вычисления (мы их не приводим) показывают, что эксцентриситеты гипербол, которые можно получить при сечении данного кругового конуса плоскостью, не превосходят $1/\cos\alpha$, где α — угол между осью и образующей конуса. (Это вытекает из того факта, что угол между асимптотами гипербол, получившихся в сечении, не превосходит 2α.)

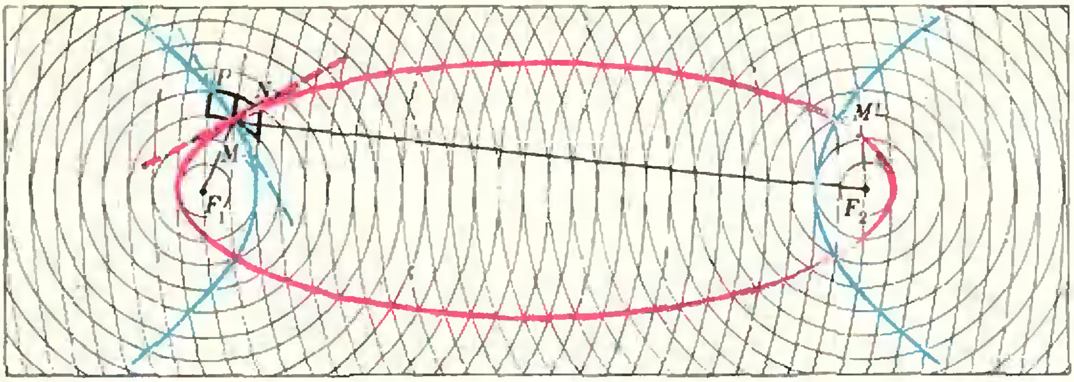


Рис. 12.

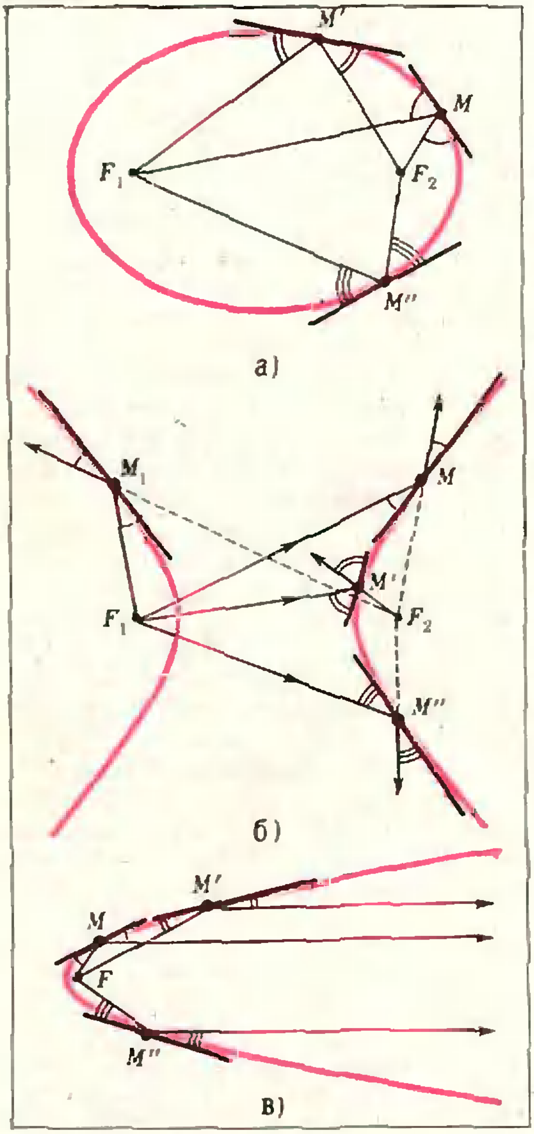


Рис. 13.

Это следует из фокальных свойств обеих кривых: для эллипса $F_1N = F_1M + d$, $F_2N = F_2M - d$ и $F_1N + F_2N = F_1M + F_2M$; аналогично и для гиперболы. Вот новый способ построения эллипса и гиперболы по фокусам и одной точке! Начинать можно с любого узла сети, и мы получаем два семейства «софокусных» эллипсов и гипербол. Это построение тем точнее, чем меньше d.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, значит, каждая пара софокусных эллипса и гиперболы пересекается под прямым углом *). Диагональ ромба делит угол ромба пополам, значит, касательная к эллипсу (гиперболе) является биссектрисой каждого угла ромбической сети, внутри которого она проходит. Из того, что каждый радиус окружности пересекает ее под прямым углом, следует, что касательная MN в каждой точке M эллипса образует равные углы с прямыми F_1M и F_2M. Значит, по закону «угол падения равен углу отражения», луч F_1M, падающий из F_1 в точку M эллипса, отражается из него по прямой MF_2 (рис. 13, а). Это будет для каждой точки эллипса. Таким образом, *все лучи, выходящие из фокуса F_1, отражаясь от эллипса, соберутся в другом его фокусе F_2.* В этом и состоит *оптическое свойство*

*) Под углом между двумя кривыми понимают угол между *касательными* к ним, проведенными в точке их пересечения.

эллипса, отсюда и название *фокус* (латинское *focus* — очаг).

Для гиперболы оптическое свойство звучит так: *лучи, выходящие из одного фокуса, отражаясь от гиперболы, будут расходиться таким образом, что кажутся выходящими из второго фокуса* (рис. 13, б).

Случай параболы — промежуточный между эллипсом и гиперболой. Второй фокус «уходит в бесконечность» по фокальной оси, и *лучи, выходящие из единственного фокуса, отражаясь от параболы, пойдут параллельно оси* *) (рис. 13, в).

Некоторые другие свойства

В заключение приведем без доказательства еще несколько свойств конических сечений.

Свойство сопряженных диаметров, доказанное для эллипса **), с некоторыми вариациями переносится на параболу и гиперболу. У параболы множество середин параллельных хорд лежит на луче, параллельном оси симметрии параболы — каждый такой луч и является диаметром параболы. У одной ветви гиперболы середины параллельных хорд также лежат на луче. Прямая, на которой этот луч лежит, проходит через центр гиперболы и называется диаметральной. Исследуйте сами, где лежат середины параллельных хорд другого вида — отрезков, один конец которых лежит на одной, а другой — на другой ветви гиперболы.

Если взять на коническом сечении шесть последовательных точек A, B, C, D, E, F (ограничиваясь в случае гиперболы одной ветвью), то в полученном вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ *три точки пересечения пар противоположных сторон AB и DF, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой* (теорема Паскаля). Могут оказаться исключения, когда имеется пара параллельных противоположных сторон или две такие пары (тогда и стороны третьей пары параллельны). Подумайте, что можно сказать о трех точках пересечения в этих случаях

Вот еще два интересных свойства — одно у эллипса, другое — у гиперболы.

Если отрезок AB постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, то любая точка M этого отрезка описывает эллипс с полуосями AM и BM *). Отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

Заканчивая статью, мы не можем не упомянуть о *законе Кеплера* для движения небесных тел — планет, комет, спутников. Если материальная точка M движется в пространстве только под действием притяжения другой материальной точки C (которую будем считать неподвижной), причем сила притяжения подчиняется закону Ньютона $F = a/r^2$ (где r — расстояние между C и M, a — постоянная), то траектория движения является коническим сечением с фокусом в точке C (либо же точка M движется по прямой, проходящей через C). Кеплер пришел к этому закону эмпирически, изучая наблюдения Тихо Браге; математически закон был доказан впоследствии Ньютоном. Планеты и естественные их спутники движутся по эллипсам, кометы — по эллипсам, гиперболам и параболам **). Космическим кораблям можно придать любую из этих траекторий.

---

*) На этом свойстве параболы основано устройство прожекторов — у них внутренняя зеркальная поверхность получена вращением параболы вокруг ее оси («параболоид вращения»). Если источник света поместить в фокусе параболоида, то лучи отразятся от зеркала параллельным пучком.

**) См. «Квант» № 1 за этот год, с. 5.

*) Доказательство этого факта читатели «Кванта» могут найти в первой публикации статьи «Эллипс» («Квант», 1970, № 9).

**) Небольшая дуга сильно вытянутого эллипса, близкая к фокусу, плохо отличима от аналогичной дуги параболы и гиперболы ($\varepsilon \approx 1$, см. с. 37). Из-за этого возникают трудности при определении орбиты кометы—вернется она или не вернется?

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыты со струей воды

М. П. Головей

Наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей и способы применения этих законов к решению различных практических задач, называется *гидравликой*. Трудно назвать область техники, где бы не применялись законы гидравлики. Они используются при строительстве гидроэлектростанций, мостов, водопроводов, каналов; они нужны для конструирования поливальных машин и дождевальных установок.

С различными гидравлическими устройствами мы встречаемся и дома: это водопровод, канализация, теплоснабжение. Истечение воды из крана, шланга, отверстия в сосуде — во всех этих, на первый взгляд, простых явлениях определить закономерности не так просто.

За примерами не надо далеко ходить. Как вы думаете, какую форму имеет поперечное сечение струи воды, вытекающей из отверстия в форме квадрата? А из отверстия в форме треугольника? круга? Не торопитесь с ответом. Попробуйте посмотреть на опыте, как вытекает вода из отверстий с различными сечениями, и вы получите совершенно неожиданный результат.

Оказывается, поперечное сечение струи, вытекающей через квадратное отверстие, имеет вид креста с четырьмя тонкими ребрами (рис. 1, *а*). Если отверстие треугольное, сечение струи приобретает форму креста с тремя тонкими ребрами (рис. 1, *б*), если круглое — форму эллипса (рис. 1, *в*). Форма сечения струи по мере удаления от стенки сосуда непрерывно меняется. На рисунке 1 показаны формы сечений струй на разных расстояниях от сосуда. Особенно заметные изменения происходят при квадратном и треугольном отверстиях. Так, поперечное сечение струи, выходящей из квадратного отверстия, сначала имеет форму восьмиугольника, а затем становится крестообразным. Это явление называется инверсией струи.

Все вы, наверное, видели, как вытекает струя воды из поливального шланга. В конце шланга обычно делают наконечник из куска трубы, слегка сплющенной с одной стороны. В этом случае струя летит дальше. Есть ли какая-нибудь закономерность в этом явлении? Оказывается, есть. Конические насадки с углом схождения $\beta \approx 13^\circ$ (рис. 2) дают в 1,3—1,4 раза больший рас-

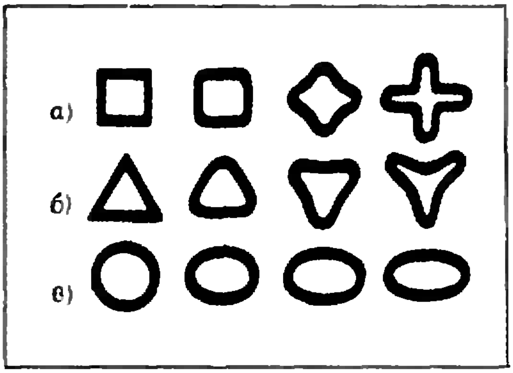


Рис. 1.

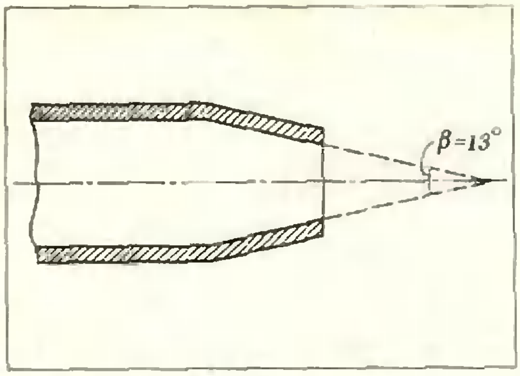


Рис. 2.

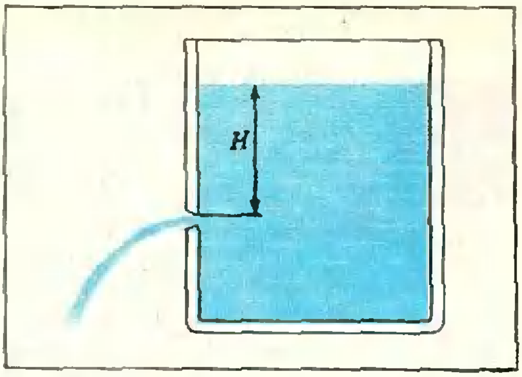


Рис. 3.

ход *) воды, чем цилиндрические (при одинаковых площадях выходных сечений). Это оптимальный угол для получения наибольшего расхода воды. Конические сходящиеся насадки дают сплошную струю с большими скоростями и поэтому широко применяются на практике в брандспойтах, соплах гидромониторов.

Обратимся теперь к истечению воды через отверстие в стенке сосуда.

Возьмем заполненный водой цилиндрический сосуд, в боковой стенке которого имеется малое отверстие площадью s_1 (рис. 3). Через это отверстие вода вытекает под давлением столба жидкости высоты H. Отверстие считается малым, если его размеры по крайней мере в десять раз меньше высоты столба H, создающего напор. При этом условии все точки малого отверстия находятся приблизительно на одной и той же глубине от поверхности жидкости, и скорости течения во всех точках можно считать одинаковыми.

Отверстием в тонкой стенке называется отверстие, края которого имеют достаточно острую кромку, чтобы толщина стенки не влияла на форму и условия истечения струи. Это условие выполняется в том случае, когда толщина кромки меньше трех диаметров отверстия.

*) Расходом называют количество воды, вытекающей в единицу времени.

От чего зависит скорость, с которой вытекает вода через малое отверстие в тонкой стенке сосуда? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся законом сохранения энергии.

Пусть за малый промежуток времени Δt из сосуда вытекло небольшое количество воды Δm. Потенциальная энергия воды в сосуде при этом уменьшилась на величину ΔmgH (время достаточно мало, чтобы считать уровень H воды в сосуде не меняющимся). Это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии массы воды Δm, вытекающей из отверстия со скоростью v, то есть $\frac{\Delta mv^2}{2}=\Delta mgH$. Отсюда

$$v=\sqrt{2gH}.$$

Сколько времени будет вытекать вода из сосуда? Очевидно, это зависит от скорости истечения и от площади отверстия. Разберемся сначала со скоростью.

Как мы уже показали, $v=\sqrt{2gH}$. Но эту скорость можно считать постоянной лишь на протяжении малого промежутка времени (пока можно считать $H=\text{const}$). По мере истечения жидкости уровень понижается, и следовательно, скорость истечения уменьшается от $v_0=\sqrt{2gH}$ (в начальный момент времени $t=0$) до $v_T=0$ (T — время вытекания). Каков характер изменения скорости со временем? Пусть в начальный момент времени ($t_1=0$), когда открывают отверстие, высота уровня воды в сосуде над отверстием равна H. Начальная скорость истечения $v_1=\sqrt{2gH}$. За малый промежуток времени Δt из сосуда вытекает масса воды $\Delta m=\rho v_1 s\Delta t$ (ρ — плотность жидкости; Δt столь мало, что в течение этого времени скорость v_1 постоянна). За это время уровень воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta h=\frac{\Delta m}{S}$ (S — площадь дна сосуда). Поэтому в следующий момент времени ($t_2=\Delta t$) скорость истечения меньше v_1 и равна $v_1-\Delta v=\sqrt{2g(H-\Delta h)}$. Возведем последнее равенство в квадрат:

$$v_1^2-2v_1\Delta v+(\Delta v)^2=2gH-2g\Delta h.$$

Пренебрегая величиной $(\Delta v)^2$ и учитывая, что $v_1^2=2gH$, получаем

$$v_1\Delta v=g\rho v_1\frac{s}{S}\Delta t,\quad \Delta v=g\rho\frac{s}{S}\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=g\rho\frac{s}{S}=\text{const}$$

(разумеется, для заданных s, S и ρ). А это означает, что скорость истечения линейно зависит от времени. Поэтому можно считать, что в течение всего времени T, пока вытекает жидкость, скорость истечения равна среднему значению (за промежуток времени T), то есть равна

$$v_{ср}=\frac{v_1+0}{2}=\sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

Теперь посмотрим, как влияет на время вытекания воды площадь отверстия. За единицу времени из сосуда должна вытекать масса жидкости $Q=\rho s v_{ср}$ (ρ — плотность жидкости). При этом мы считаем, что скорость в данный момент времени во всех точках отверстия направлена строго перпендикулярно к плоскости сечения отверстия. Однако, если внимательно приглядеться к струе, вытекающей из круглого малого отверстия в тонкой стенке, то можно заметить, что диаметр ее поперечного сечения меньше диаметра отверстия. Струя как бы сжимается. Сжатие струи происходит из-за того, что жидкость подтекает к отверстию со всех сторон и ее частицы, движущиеся к отверстию вдоль стенок сосуда, пройдя отверстие, продолжают сближаться с осью струи. Только на некотором расстоянии от кромки отверстия, равном примерно радиусу отверстия, траектории частиц становятся почти параллельными. Сжатие струи продолжается и дальше, но уже несравненно медленнее, незаметно для глаза. Сечение, при котором заканчивается резкое видимое сжатие струи, называется сжатым. Отношение площади сжатого сечения s_2 к площади сечения отверстия s_1 называется коэффициентом сжатия ε:

$$\varepsilon=s_2/s_1.$$

Поскольку расстояние между сечениями s_1 и s_2 мало (как мы уже говорили, оно равно примерно радиусу сечения s_1), то скорость воды во всех точках сечения s_2 практически равна $\sqrt{2gh}$ (h — высота уровня воды в сосуде в данный момент времени) и перпендикулярна к плоскости сечения. Следовательно, расход воды

$$Q=s_2v_{ср}=\varepsilon s_1v_{ср}=\varepsilon s_1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2gH}$$

Теперь совсем просто подсчитать время, в течение которого вытекает вода из сосуда. Объем вытекающей воды $V=SH$, следовательно,

$$T=\frac{V}{Q}=\frac{SH}{\frac{1}{2}\varepsilon s_1\sqrt{2gH}}=\frac{S\sqrt{2gH}}{\varepsilon s_1\sqrt{g}}.$$

Это соотношение можно проверить на опыте. Для эксперимента возьмите сосуд с отверстием диаметром 2—3 *мм*. Можно воспользоваться металлической банкой с высокими стенками или цилиндрическим ведром. Отверстие должно находиться достаточно далеко от дна и от поверхности воды. Заметьте по часам время истечения жидкости и сравните его с расчетами, проведенными с $Q = s_1 v_{ср}$, где s_1 — площадь сечения отверстия. Очевидно, что отношение $T_{эксп.}: T_{расч.}$ равно ε. Вообще при истечении струи через малое отверстие в тонкой стенке $\varepsilon = 0{,}64 \div 0{,}60$. Укладывается ли ваш результат в эти пределы?

После того как мы разобрались в особенностях истечения струи воды из отверстия в стенке сосуда, обратимся к красивому и вместе с тем простому опыту, моделирующему основной элемент волоконной оптики — *световод*.

Обычно световод состоит из десятков или сотен тысяч тончайших (диаметром несколько микрон) стеклянных волокон. Длина их может достигать нескольких метров. Волокна укладывают в плотный жгут, наподобие многожильного провода, и заключают в защитную оболочку. Световые лучи попадают внутрь световода и распространяются по каждому волокну независимо от одного конца до другого.

Работа световода основана на явлении полного внутреннего отражения, заключающегося в том, что лучи света могут выходить из оптически более плотной среды в менее плотную только в том случае, если они падают на границу раздела сред под углами, меньшими предельного угла полного внутреннего отражения. Для границы раздела стекло — воздух этот угол равен 42°, для границы раздела вода — воздух 49°. Все лучи, составляющие с границей раздела угол, больший предельного, отражаются обратно в более плотную среду. Это явление происходит и в волокнах световодов, где луч, войдя в один конец волокна, многократно отражаясь, доходит до другого его конца.

Рассмотрим еще один опыт со струей воды. Для эксперимента необходим какой-нибудь сосуд со светонепроницаемыми стенками диаметром 10—20 *см* и высотой 20—40 *см*. Лучше всего воспользоваться жестяной банкой или цилиндрическим ведром. На расстоянии 30—40 *мм* от дна следует просверлить два отверстия, одно напротив другого (рис. 4). Диаметр одного отверстия — 2 *мм*, диаметр другого — 5—10 *мм*. Получающиеся по краям отверстий заусенцы обязательно зачистите наждачной бумагой или срежьте сверлом большего диаметра, иначе вытекающая струя получится неоднородной.

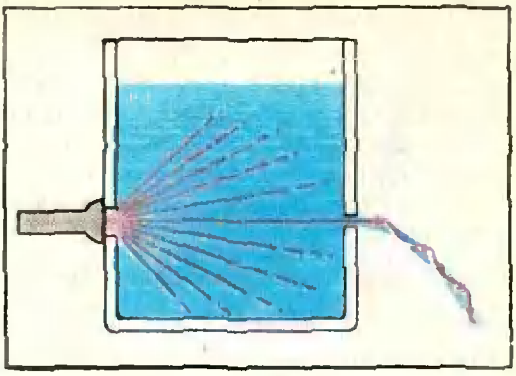


Рис. 4.

Большее отверстие заклейте прозрачным материалом, например, полиэтиленовой пленкой или целлофаном. Достаточно хорошо и герметично можно заклеить отверстие даже резиновым клеем. Опыт лучше всего проводить в затемненной комнате. Заклеенное отверстие нужно освещать направленным источником света. Им может служить обычный карманный фонарь. Пока сосуд не заполнен водой, свет карманного фонаря проходит насквозь через оба отверстия. Если же заполнить сосуд водой, траектория луча света изогнется по форме вытекающей струи.

Дело в том, что, проходя через прозрачное окно, свет сквозь второе отверстие в стенке попадает внутрь струи, вытекающей из отверстия. На границу раздела вода — воздух лучи света попадают под углами, большими угла полного внутреннего отражения. Поэтому свет не может выйти через боковую поверхность и следует вдоль струи, которая уподобляется изогнутому световоду.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Выход в пространство

И. Ф. Шарыгин

Попробуйте решить следующую головоломку: из шести спичек сложить четыре правильных треугольника так, чтобы стороной каждого была целая спичка. Попытки решить ее к успеху как будто не приводят. Мало того, можно доказать, что такое построение не осуществимо на плоскости (попробуйте это сделать). Как же быть? Оказывается, нужно выйти в пространство — сложить из спичек правильный тетраэдр (рис.1). Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

Выход в пространство бывает полезен и при решении некоторых планиметрических задач. Классическим примером является теорема Дезарга. *Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1* и C_2A_2 *расположены на одной прямой* (рис. 2). Утверждение теоремы становится очевидным, если увидеть на рисунке 2 пространственную фигуру, а именно — трехгранный угол, пересеченный двумя плоскостями: одна плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках A_1, B_1 и C_1, а другая в точках A_2, B_2 и C_2. Три точки пересечения соответствующих сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ принадлежат линии пересечения этих плоскостей и, значит, лежат на одной прямой.

С помощью выхода в пространство изящно доказывается и теорема Брианшона. *Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ — плоский шестиугольник, описанный около окружности. Возьмем произвольный пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 3), отличный от $ABCDEF$, про-

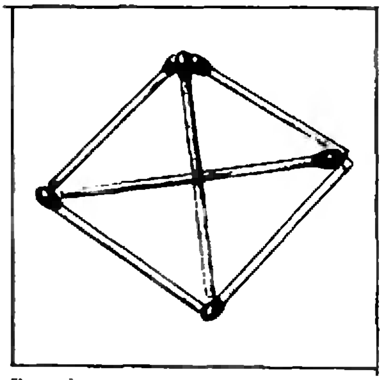


Рис. 1.

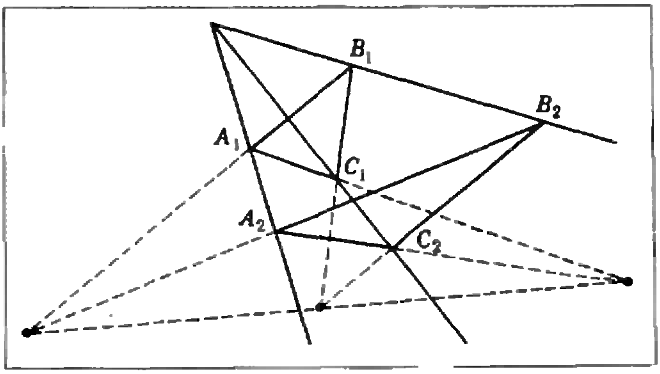


Рис. 2.

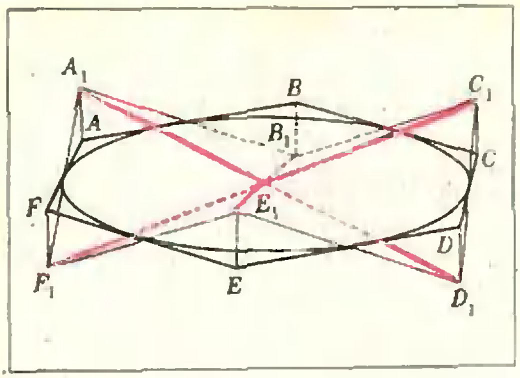


Рис. 3.

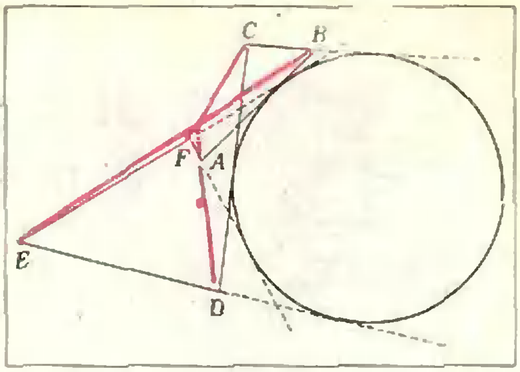


Рис. 4.

екция которого на плоскость p есть шестиугольник $ABCDEF$ и соответствующие стороны которого проходят через точки касания шестиугольника $ABCDEF$ с окружностью. Для доказательства существования такого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ достаточно одну вершину, например, A_1, взять произвольно на перпендикуляре к плоскости p, восстановленном в точке A; тогда остальные вершины определяются однозначно. В самом деле, пусть a, b, c, d, e, f — длины касательных к окружности, проведенных соответственно через точки A, B, C, D, E, F и h — расстояние от A_1 до плоскости шестиугольника $ABCDEF$. Тогда B_1 находится по другую сторону от плоскости, по сравнению с A_1 на расстоянии hb/a, C_1 по ту же сторону плоскости, что и A_1, на расстоянии $\frac{hb}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{hc}{a}$ от плоскости и т. д. Наконец, найдем, что F_1 лежит по другую сторону от плоскости, нежели A_1, на расстоянии hf/a, и, значит A_1 и F_1 лежат на прямой, проходящей через точку касания AF с окружностью. Любые две противоположные стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ расположены в одной плоскости (докажите самостоятельно). Следовательно, любые две диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются, а отсюда и все три диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (они *не лежат* в одной плоскости), пересекаются в одной точке. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ — проекция шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, теорема доказана.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общий факт. *Если прямые AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности, то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке или параллельны.* Один из возможных случаев расположения точек A, B, C, D, E, F показан на рисунке 4.

Только что доказанная теорема Брианшона оказывается справедливой для шестиугольника, описанного около произвольного конического сечения (эллипса, параболы, гиперболы), поскольку произвольное коническое сечение можно спроектировать относительно некоторой точки на другую плоскость так, что его проекция будет окружностью. При этом прямые, касающиеся конического сечения, перейдут в прямые, касающиеся окружности.

Вот более сложный пример. *Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности.*

Пусть данная окружность находится в плоскости α. Если мы докажем, что существует такая плоскость β и точка O, что проекцией данной окружности относительно точки O на плоскость β будет окружность, но при этом центр первой окружности переходит в точку, отличную от центра второй окружности, то наша за-

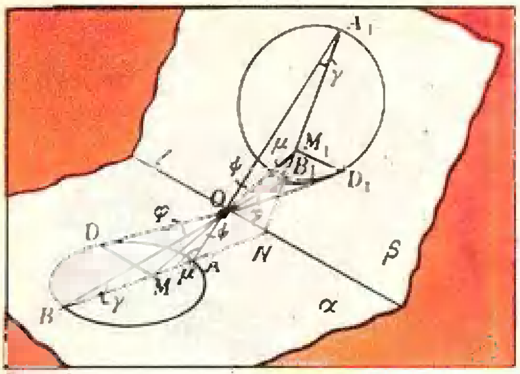


Рис. 5.

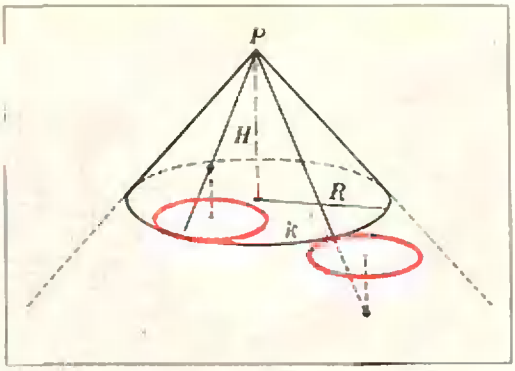


Рис. 6.

дача будет решена (рис. 5). Действительно, любому построению с помощью одной линейки в плоскости α соответствует при проектировании построение с помощью одной линейки в плоскости β.

В качестве плоскости β возьмем произвольную плоскость, пересекающую плоскость α по прямой l, не проходящей через центр данной окружности. Пусть AB — диаметр данной окружности, перпендикулярный к l, а N — точка пересечения прямых AB и l. Восставим из точки N перпендикуляр к l, лежащий в плоскости β, и возьмем на нем точки A_1 и B_1 так, что $A_1N = BN$, $B_1N = AN$. В качестве точки O — центра проекции — возьмем точку пересечения прямых AA_1 и BB_1. Очевидно, середина отрезка AB проектируется в точку, отличную от середины отрезка A_1B_1.

Возьмем произвольную точку D на данной окружности $DM \perp AB$. Проекцией DM будет $D_1M_1 \perp A_1B_1$. Докажем, что D_1 лежит на окружности, построенной на A_1B_1 как на диаметре. Воспользуемся тем, что $M_1D_1 \cdot MO = MD \cdot M_1O$ $(\triangle DMO \sim \sim \triangle D_1M_1O)$ и $MD^2 = BM \cdot MA$. Нам нужно доказать, что $M_1D_1^2 = B_1M_1 \cdot M_1A_1$, или, используя два предыдущих равенства, получить, что

$$\frac{BM \cdot MA}{MO^2} = \frac{B_1M_1 \cdot M_1A_1}{M_1O^2},$$

$$\frac{BM}{MO} \cdot \frac{MA}{MO} = \frac{B_1M_1}{M_1O} \cdot \frac{M_1A_1}{M_1O}.$$

Заменяя в последнем равенстве отношения отрезков отношением синусов противоположных углов соответствующих треугольников, получим очевидное равенство

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \frac{\sin\psi}{\sin\mu} = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\gamma}.$$

Одной из самых красивых и неожиданных иллюстраций к теме «Выход в пространство» служит, пожалуй, решение этим методом известной задачи Аполлония. *Построить окружность, касательную к трем данным окружностям.* Поставим в соответствие каждой окружности в данной плоскости две точки пространства, расположенные по разные стороны от плоскости, удаленные от этой плоскости на расстояние, равное радиусу окружности, и такие, что проекция каждой из них на плоскость есть центр окружности. Обратно: каждой точке пространства соответствует окружность в нашей плоскости, центр которой совпадает с проекцией точки на плоскость, а радиус равен расстоянию от точки до плоскости. Прежде чем перейти к решению задачи Аполлония, обратим внимание на следующее обстоятельство: если P — одна из двух точек, соответствующих окружности k, то любой точке, находящейся на конической поверхности, вершиной которой является точка P, а направляющей — окружность k (рассматриваются обе полы этой поверхности), соответствует окружность, касающаяся окружности k (рис. 6).

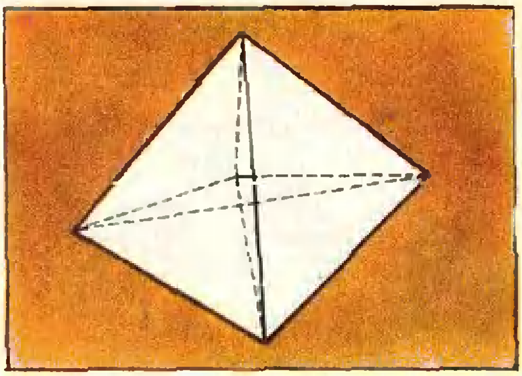


Рис. 7.

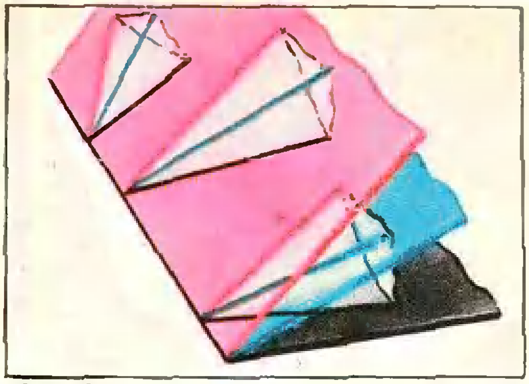


Рис. 8.

Пусть теперь даны три окружности на плоскости. Построим для каждой указанным выше способом одну из двух конических поверхностей. Точке пересечения этих трех поверхностей соответствует окружность, касающаяся трех данных. Беря различные расположения точек, соответствующих окружностям, можно получить все решения нашей задачи.

Мы привели несколько примеров, когда помогает трехмерное пространство. А может ли помочь четырехмерное пространство? Конечно, да! Например, с его помощью можно решить такую головоломку: из десяти спичек сложить десять правильных треугольников так, чтобы сторона каждого треугольника равнялась целой спичке.

Решение. Нужно выйти в четырехмерное пространство и сложить в нем многогранник, аналогичный тетраэдру. Такие многогранники называются *симплексами*. Симплекс на плоскости — это треугольник, в трехмерном пространстве — тетраэдр; что представляет собой симплекс в четырехмерном пространстве, можно понять из рисунка 7. Этот пример, конечно, серьезен лишь наполовину, а вот уже вполне серьезный пример. Пусть три плоскости пересекаются по одной прямой. Рассмотрим три трехгранных угла, вершины которых расположены на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях (предполагаем, что соответствующие ребра, то есть ребра, расположенные в одной плоскости, не пересекаются в одной точке). Тогда *три точки пересечения соответствующих граней этих трехгранных углов лежат на одной прямой* (рис. 8). Поскольку для доказательства этой теоремы мы хотим «выйти» в четырехмерное пространство, расскажем сначала о некоторых свойствах этого пространства.

Простейшими фигурами четырехмерного пространства будут: точка, прямая, плоскость и трехмерное многообразие, которое мы будем называть гиперплоскостью. Первые три фигуры — это наши старые знакомые из трехмерного пространства. Правда, некоторые утверждения, связанные с ними, нуждаются в перефразировке. Например, вместо следующей аксиомы трехмерного пространства: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, — следует ввести аксиому: если две различные плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Введение нового геометрического образа — гиперплоскости — заставляет ввести связанную с ним группу аксиом, аналогично тому, как при переходе от геометрии плоскости,— планиметрии, к геометрии трехмерного пространства,— стереометрии, *вводится группа аксиом (вспомните, каких?)*, выражающих основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

1. Какова бы ни была гиперплоскость, существуют точки, ей принадлежащие, и точки, ей не принадлежащие.

2. Если две различные гиперплоскости имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости, то есть существует плоскость, принадлежащая каждой из гиперплоскостей.

3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, имеет с ней общую точку, то су-

ществует единственная гиперплоскость, содержащая эту прямую и эту плоскость.

Из этих аксиом непосредственно следует, что четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, определяют гиперплоскость; точно также три прямые, не принадлежащие одной плоскости, но имеющие общую точку или две различные плоскости, имеющие общую прямую, определяют гиперплоскость. Мы не будем доказывать эти утверждения; попытайтесь сделать это самостоятельно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт, справедливый в четырехмерном пространстве: три различные гиперплоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую. В самом деле, по аксиоме 2, любые две из трех гиперплоскостей имеют общую плоскость. Возьмем две плоскости, по которым пересекается какая-то из трех гиперплоскостей с двумя другими. Эти две плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости — трехмерному многообразию, имеют общую точку, и, значит, пересекаются по прямой или совпадают.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Если бы три плоскости, о которых говорится в условии, были расположены в четырехмерном пространстве, то утверждение было бы очевидным. Действительно, каждый трегранный угол определяет гиперплоскость. Две гиперплоскости пересекаются по плоскости. Эта плоскость не принадлежит третьей гиперплоскости (по условию, эти гиперплоскости пересекают одну из данных плоскостей по трем прямым, не проходящим через одну точку), и, следовательно, пересекается с ними по прямой линии. Любые три соответствующие грани трехгранных углов лежат в одной гиперплоскости, определяемой двумя плоскостями, на которых расположены соответствующие ребра, и поэтому каждая тройка соответствующих граней имеет общую точку. Три эти точки принадлежат трем гиперплоскостям, определяемым трехгранными углами, и, как было доказано, лежат на одной прямой. Теперь для завершения доказательства достаточно «увидеть» в данном условии задачи проекцию соответствующей четырехмерной конфигурации плоскостей и трехгранных углов.

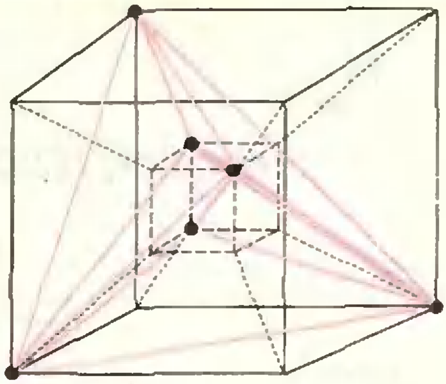


Рис. 9.

В заключение мне бы хотелось предостеречь читателя: не следует чрезмерно доверять своей «трехмерной интуиции», когда речь идет о четырехмерном пространстве.

Как вы думаете, сколько вершин может иметь выпуклый многогранник, для которого *каждый* отрезок, соединяющий любые две его вершины, является ребром? На плоскости таким свойством обладает только треугольник, в пространстве — тетраэдр. В четырехмерном же пространстве существуют такие многогранники со сколь угодно большим числом вершин (см., например, рис. 9).

Упражнения

1. По четырем прямым плоскости с постоянными скоростями идут четыре пешехода A, B, C, D. Известно, что пешеходы A, B и C встречаются друг с другом, пешеход D встречается с A и B. Докажите, что пешеходы C и D встречаются.

2. На плоскости даны три непересекающиеся окружности. Рассмотрим шесть точек, каждая из которых является точкой пересечения общих внутренних или общих внешних касательных к каким-то двум из данных окружностей. Докажите, что эти шесть точек лежат на четырех прямых, по три на каждой.

3. Даны три параллельные прямые и три точки на плоскости. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

4. Три точки A, B и C, лежат на одной прямой. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B, и проведем к ней из C две касательные — CM и CN. Докажите, что точка пересечения прямых MN и AB постоянна.

5. Пусть A — данная точка внутри данной окружности, BC — произвольная хорда, проходящая через A. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

6. Покажите, что в четырехмерном пространстве две плоскости могут пересекаться в одной точке.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М321, М322» или «...Ф333». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М321—М325; Ф333—337

М321. Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую ε.

А. В. Браилов

М322. а) Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением N кругов. Докажите, что границу этой фигуры можно представить в виде объединения $2N-2$ дуг окружностей.

б) В алфавите N букв. Несколько букв выписано по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв a, b можно провести прямую так, что все буквы a будут по одну сторону от прямой, а буквы b — по другую (рис. 1). Докажите, что выписано не более $2N-2$ букв.

С. В. Фомин

М323*. Докажите, что любую функцию, определенную на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии.

В. А. Сергеев

М324. Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой

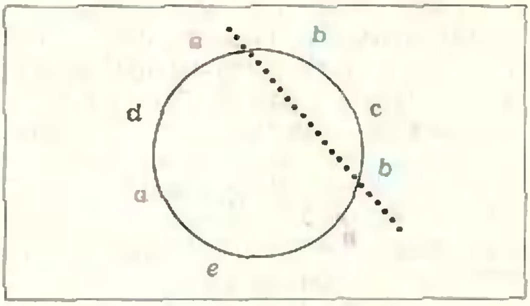


Рис. 1.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

....

Рис. 2.

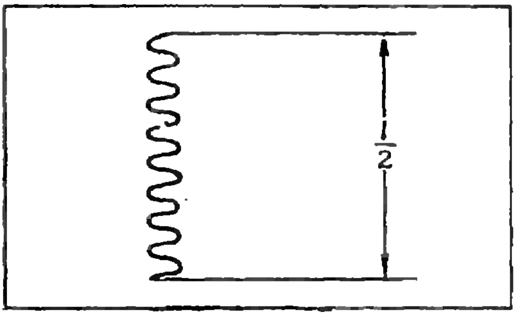


Рис. 4

состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

С. В. Фомин

М325. В числовом треугольнике верхнее число равно 1 и крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет «треугольник Паскаля», изображенный на рис. 2). Пусть натуральное число a, большее 1, встречается в этом треугольнике k раз. Докажите, что $2^k < a^2$.

Ф333. На непроводящем диске радиуса R закреплена по хорде проволока длиной l. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω. Перпендикулярно к диску направлено магнитное поле с индукцией B (рис. 3). Найти разность потенциалов между серединой и концом проволоки.

Б. Б. Буховцев

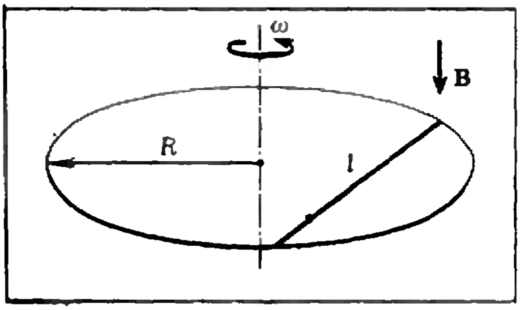


Рис. 3.

Ф334. Бусинка соскальзывает без трения по вертикально расположенной проволоке длины l, которая изогнута в гармошку длины $\frac{l}{2}$ (рис. 4). Во сколько раз время соскальзывания бусинки больше времени ее падения с высоты l? Амплитуда перегибов проволоки много меньше ее длины. Размеры бусинки пренебрежимо малы по сравнению с длиной «колена» гармошки.

Б. Н. Брейзман

Ф335. Цилиндрический сосуд радиуса R, ось которого составляет угол α с вертикалью, заполнен водой. В цилиндр опускают хорошо притертый поршень, материал которого пропускает воздух, но непроницаем для воды. При каком минимальном весе поршня вся его нижняя поверхность будет касаться воды?

В. В. Мирнов

Ф336. Цилиндрическая чашка со ртутью вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. При этом поверхность ртути образует параболическое зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала. Плотность ртути ρ, ускорение свободного падения g.

Ф337. При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объясните, почему.

Решения задач

М286 — М290; Ф296 — Ф298

М286. *На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?*

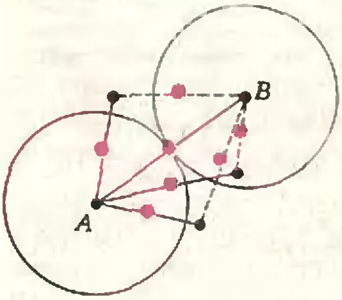


Рис. 1.

Рис. 2.

Рассмотрим всевозможные расстояния между заданными N точками и выберем среди этих расстояний наибольшее — пусть это расстояние между какими-то двумя точками A и B. Соединим точку A с остальными $N-1$ точками; получим $N-1$ отрезков. Середины этих отрезков различны и все лежат внутри или на границе круга с центром в точке A радиуса $\frac{1}{2}|AB|$ (рис. 1).

Аналогично, соединив точку B с оставшимися $N-1$ точками, получим $N-1$ отмеченных точек (середин), расположенных внутри или на границе круга того же радиуса с центром в точке B.

Построенные два круга имеют только одну общую точку — середину отрезка AB. Следовательно, всегда имеется по крайней мере $2(N-1)-1$ (так как середину отрезка AB мы учитываем дважды) отмеченных середин, то есть не менее $(2N-3)$ отмеченных точек.

Покажем, что $2N-3$ — это наименьшее число отмеченных точек. Пусть заданные N точек лежат на одной прямой, причем расстояния между соседними точками одинаковы (рис. 2). Легко видеть, что в этом случае число отмеченных точек — середин (на рисунке 2 это красные точки) равно $(N-2)+N-1=2N-3$. Тем самым все доказано.

В заключение мы предлагаем читателям подумать над следующей задачей. При каких N можно расположить на плоскости N точек так, чтобы они не лежали на одной прямой и чтобы при этом количество отмеченных середин отрезков с концами в этих точках равнялось $2N-3$?

С. В. Конягин

◆

М287. *Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число 1, 2, 3,... можно представить в виде разности двух чисел этой последовательности единственным способом?*

Такая последовательность существует. Объясним коротко, как ее построить.

Предположим, что мы построили конечную последовательность, обладающую следующими свойствами:

1) все попарные разности между членами этой последовательности различны;

2) числа $1, 2, \ldots, k$ можно представить в виде разности двух ее членов;

3) число $k+1$ нельзя представить в виде разности двух ее членов.

Пусть максимальный член этой последовательности равен M. «Допишем» теперь эту последовательность: добавим к ней числа $2M$ и $2M+k+1$. Проверьте сами, что новая последовательность удовлетворяет свойствам 1,2 (с заменой k на $k+i$, где i — некоторое натуральное число, зависящее от первоначально построенной последовательности, $i \geq 1$) и свойству 3 (с заменой числа $k+1$ на число $k+i+1$). Применяя описанное «дописывание», например, к числам 1,2, получим бесконечную последовательность, удовлетворяющую условиям задачи.

Л. Г. Лиманов

M288. *На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого ровно один друг.*

Возьмем ученого A, число друзей у которого максимально (если таких ученых несколько, возьмем любого из них); обозначим это число через N. Если ни один из N друзей ученого A не имеет ровно одного друга, то так как ученый A имеет максимальное число друзей, каждый из его друзей может иметь 2,3, ..., N друзей— всего $N-1$ возможностей. Поскольку же число друзей ученого A равно N, то, значит, двое из друзей ученого A имеют равное число друзей и, кроме того, общего друга — ученого A. Но это противоречит условию задачи, и, следовательно, хотя бы один из ученых (друзей ученого A) имеет *ровно одного* друга.

С. Ландо

◆

M289. *N гирь, каждая из которых весит целое число граммов, разложены на K равных по весу куч. Докажите, что можно не менее чем K разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся $(N-1)$ гири уже нельзя разложить на K равных по весу куч.*

Возьмем две коробки и разложим в них наши гири так, чтобы в первой коробке оказалось менее K гирь. Раскладывать же гири будем следующим образом.

Сначала возьмем гири, веса которых не делятся на K. Если таких гирь меньше K, то положим их в первую коробку и перейдем к следующему шагу. Если же таких гирь окажется больше K, то положим все гири во вторую коробку.

В первом случае возьмем те гири, веса которых делятся на K, но не делятся на K^2. Если они уместятся в первой коробке, то положим их туда; если же нет, то положим все гири, не лежащие в первой коробке, во вторую.

Если опять будет иметь место первый случай, возьмем затем те гири, веса которых делятся на K^2, но не делятся на K^3 и так далее. Так как всего гирь не меньше K штук, то часть гирь обязательно попадет во вторую коробку. Пусть первой группой гирь, не поместившихся в первой коробке, будут гири, веса которых делятся на K^r, но не делятся на K^{r+1}. Во второй коробке окажутся те гири, веса которых делятся на K^r, а в первой—те, веса которых не делятся на K^r.

По условию задачи, гири можно разложить на K равных по весу групп. Поскольку в первой коробке меньше K гирь, в ней никак не могут быть представлены все K групп, и значит, существует группа, все гири из которых оказались во второй коробке. Следовательно, суммарный вес этой (а значит, и каждой) группы делится на K^r. Так как всего у нас K равных по весу групп, то суммарный вес гирь делится на K^{r+1}.

Предположим теперь, что мы убрали какую-нибудь гирю, и оставшиеся гири смогли разделить на K равных по весу групп. Как и раньше, получим, что сумма весов оставшихся гирь делится на K^{r+1}.

Вес гири, которую мы убрали, равен разности суммарных весов всех гирь и оставшихся гирь; следовательно, вес этой гири делится на K^{r+1} (заметим, что r может оказаться равным нулю; это соответствует тому, что в с е гири попадают во вторую коробку, а первая остается пустой). Значит, если бы мы убрали гирю, вес которой не делится на K^{r+1}, то оставшиеся гири нельзя было бы разложить на K равных по весу групп. Но в силу выбора числа r гирь, веса которых не делятся на K^{r+1}, не меньше K, так как иначе они все были бы помещены в первую коробку. Тем самым все доказано.

С. В. Конягин.

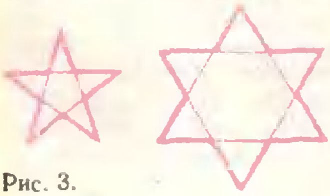


Рис. 3.

◆

M290. *Для каких n существует такая замкнутая непересекающаяся ломаная из n звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит еще хотя бы одно ее звено?*

Заметим сразу, что число звеньев n должно быть достаточно большим, во всяком случае, $n > 8$. Докажем вначале (учитывая уже сделанное замечание), что любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная с н е ч е т н ы м числом звеньев, не превышающим 13, обладает тем свойством, что всегда найдется прямая, содержащая ровно одно звено этой ломаной. Предположим противное, то есть что для такой

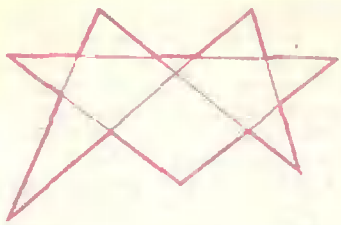


Рис. 4.

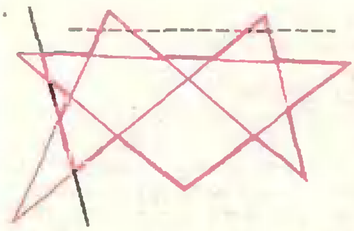


Рис. 5.

ломаной ($n = 2k + 1$, $n \leqslant 13$) не существует прямой, содержащей ровно одно звено. Тогда на одной из прямых должны лежать по крайней мере три звена нашей ломаной. У этих трех звеньев шесть концов, и из каждого конца выходит звено ломаной, то есть всего шесть новых звеньев, причем никакие два из этих звеньев не лежат на одной прямой. Поэтому каждая прямая, содержащая одно из этих шести звеньев ломаной, должна в силу сделанного предположения содержать по крайней мере еще одно звено, отличное от уже рассмотренных ранее ($3 + 6$ звеньев); значит, рассматриваемая ломаная должна иметь еще по крайней мере шесть звеньев. Получаем, что число звеньев у такой ломаной должно быть не меньше, чем $3 + 6 + 6 = 15$ — противоречие.

Покажем теперь, что для любого четного $n \geqslant 10$ и нечетного $n \geqslant 15$ ломаная, о которой говорится в задаче, существует. Для четных $n \geqslant 10$ это хорошо всем известные $\frac{n}{2}$-конечные звезды (рисунок 3; на этом рисунке $n = 10$ и $n = 12$). Несамопересекающуюся замкнутую ломаную с нечетным числом звеньев, бо́льшим 13, обладающую указанным свойством, построить сложнее. Ломаная из 15-ти звеньев изображена на рисунке 4. Отрезая от нее последовательно прямой по два угла, получим ломаную с 17-ю звеньями, 19-ю, и так далее (рис. 5).

С. Ландо

◆

Ф296. *Каждый из k различных конденсаторов с емкостями C_1, C_2, ..., C_k заряжен до разности потенциалов U. Затем все конденсаторы соединены последовательно разноименными полюсами в замкнутую цепь. Найти напряжение на каждом конденсаторе в этой цепи.*

До соединения конденсаторов в цепь их заряды были $q_1 = C_1U$, $q_2 = C_2U$, . . . , $q_i = C_iU$, . . . , $q_k = C_kU$. Обозначим заряды конденсаторов после соединения в цепь соответственно через q_1', q_2', . . . , q_k'. Распределение зарядов на пластинах конденсаторов будет таким, как показано на рисунке 6. Из закона сохранения заряда следует, что сумма зарядов соединенных друг с другом пластин соседних конденсаторов (один из таких участков цепи выделен на рисунке 6 пунктирной линией) должна быть равна суммарному заряду, который был на этих пластинах до соединения конденсаторов. То есть (с учетом знаков зарядов)

$$\begin{aligned} q_2'-q_1' &= q_2 - q_1 = (C_2 - C_1)U, \\ q_3'-q_2' &= q_3 - q_2 = (C_3 - C_2)U, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ q_k'-q_{k-1}' &= q_k - q_{k-1} = (C_k - C_{k-1})U. \end{aligned} \qquad (*)$$

Кроме того, работа по перенесению заряда вдоль замкнутого контура в электростатическом поле равна нулю, поэтому равна нулю сумма напряжений на отдельных конденсаторах: $U_1 + U_2 + \ldots + U_k = 0$, или

$$\frac{q_1'}{C_1} + \frac{q_2'}{C_2} + \ldots + \frac{q_k'}{C_k} = 0. \qquad (**)$$

Из системы уравнений (*) и (**) определим новые заряды конденсаторов, а потом и напряжения на них. Прежде всего, выразим все заряды через заряд q_1' первого конденсатора. Из первого уравнения системы (*) следует, что $q_2' = q_1' + (C_2 - C_1)U$. Сложив первое и второе уравнения системы (*), получим $q_3' = q_1' + (C_3 - C_1)U$.

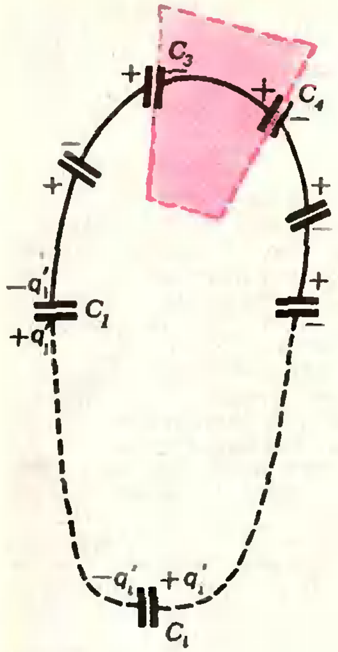


Рис. 6.

Аналогично, для заряда i-го конденсатора получим

$$q_i' = q_1' + (C_i - C_1)\,U.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (**):

$$\frac{q_1'}{C_1} + \left[\frac{q_1'}{C_2} + \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)U\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\frac{q_1'}{C_k} + \left(1 - \frac{C_1}{C_k}\right)U\right] = 0,$$

или

$$q_1'\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right) + kU -$$

$$- C_1U\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right) = 0.$$

Отсюда $q_1' = (C_1 - kC_0)\,U$, где C_0 — емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}.$$

Так как $q_i' = q_1' + (C_i - C_1)\,U$, то

$$q_i' = (C_1 - kC_0)\,U + (C_i - C_1)\,U = (C_i - kC_0)\,U.$$

Это означает, что напряжение на i-м конденсаторе равно

$$U_i' = \frac{q_i'}{C_i} = \left(1 - k\,\frac{C_0}{C_i}\right)U.$$

◆

Ф297. *Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении p. Радиусы отверстий R и r. Определить суммарную силу, действующую на пробку со стороны жидкости. Поле тяжести не учитывать.*

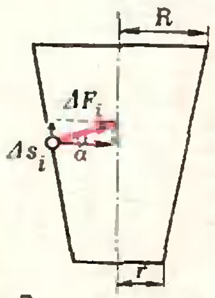


Рис. 7.

На каждый малый элемент боковой поверхности пробки с площадью Δs_i действует сила давления жидкости $\Delta F_i = p\Delta s_i$, направленная перпендикулярно к боковой поверхности пробки (рис. 7). Из симметрии ясно, что горизонтальные составляющие таких сил, действующих на различные малые элементы поверхности пробки, складываясь, взаимно уничтожат друг друга. Поэтому равнодействующая сил давления вертикальна и равна сумме вертикальных составляющих этих сил. То есть

$$F = \Sigma F_i \sin\alpha = \Sigma\, p\Delta s_i \sin\alpha = p\,\Sigma\Delta s_i \sin\alpha.$$

Произведение $\Delta s_i \sin\alpha$ — это проекция площади элемента на плоскость, параллельную стенкам сосуда. Следовательно, сумма $\Sigma\Delta s_i \sin\alpha$ равна площади проекции боковой поверхности пробки на эту плоскость, т. е. $\pi\,(R^2 - r^2)$. Поэтому

$$F = p\,\pi\,(R^2 - r^2).$$

Приведем еще одно решение этой задачи. Рассмотрим аналогичный данному в задаче плоский сосуд, но без отверстий. Выделим в этом сосуде объем жидкости, равный объему пробки между стенками сосуда (рис. 8). Так как выделенный объем жидкости находится в равновесии, то равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю. Какие же силы действуют на выделенный объем жидкости? Это силы реакции со стороны стенок сосуда, равные по абсолютной величине $N_1 = p\pi R^2$ и $N_2 = p\pi r^2$, и равнодействующая F

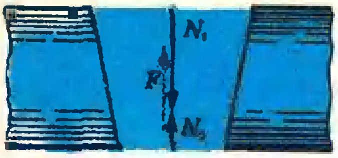


Рис. 8.

сил давления со стороны окружающей жидкости, направленная вертикально вверх. Так как $N_1 - N_2 - F = 0$, то

$$F = N_1 - N_2 = \pi p\,(R^2 - r^2).$$

Очевидно, что на пробку со стороны жидкости действует точно такая же сила.

◆

Ф298. *Внутри фотоаппарата перпендикулярно к фотопластинке расположено плоское зеркало, длина которого DB равна половине фокусного расстояния объектива (рис. 9). Изображение A звезды Вега находится от центра фотопластинки на расстоянии, вдвое меньшем радиуса объектива. Во сколько раз освещенность «отраженного изображения» C звезды Вега меньше освещенности ее изображения A в присутствии зеркала?*

Найдем отношение световых потоков, идущих от далекой звезды и попадающих на фотопластинку в точки A и C (рис. 9). В точке A собираются те лучи, которые проходят через линзу объектива ниже точки G — точки пересечения прямой AD с линзой. Лучи, идущие выше точки G, попадают на зеркало и, отражаясь от него, собираются в точке C.

Рассмотрим сечение линзы объектива плоскостью, перпендикулярной к падающему пучку лучей (рис. 10). Прямая EK делит линзу на два сегмента, через которые лучи попадают в точку A или в точку C. Так как линза равномерно освещена светом звезды, то отношение световых потоков равно отношению площадей соответствующих сегментов. Найдем это отношение.

Фотопластинка расположена в фокальной плоскости объектива, длина зеркала равна половине фокусного расстояния объектива, поэтому $DB = OD$ (см. рис. 9) и $\Delta GDO = \Delta ADB$. Следовательно, $GO = AB = R/2$, где R — радиус

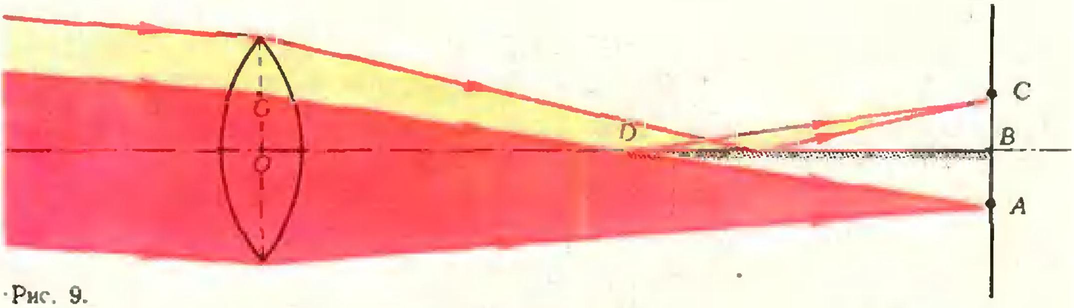


Рис. 9.

объектива. Тогда (см. рис. 10) $\angle GKO = 30°$, $\angle KOG = 60°$ и $\angle EOK = 120°$. Выразим теперь площади сегментов S_1 и S_2 через площади соответствующих секторов и треугольника EOK:

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{360}\,120 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{\pi R^2}{360}\,240 + R^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отношение S_1/S_2 равно

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2/3 - R^2\sqrt{3}/4}{2\pi R^2/3 + R^2\sqrt{3}/4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}25.$$

И. Ш. Слободецкий

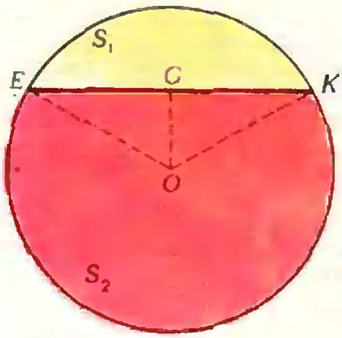


Рис. 10.

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М276 — М285; Ф293 — Ф302. Жирные цифры после фамилии — последние цифры номера решенной задачи.

Математика

Большинство читателей, приславших нам письма, успешно справилось с задачами **М276, М281, М282**. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) **77, 79, 84, 85**; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) **84**; *В. Басманов* (Воронеж) **77, 84**; *А. Блох* (Харьков) **77, 78, 84**; *К. Бобрович* (Могилев) **85**; *А. Богорад* (Ленинград) **85**; *И. Бродская* (Москва) **85**; *Л. Бродский* (Москва) **77, 84**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **77**; *Р. Вассерман* (Одесса) **84, 85**; *В. Винокуров* (Москва) **77, 84**; *В. Витюков* (Орел) **84**; *А. Ворович* (Москва) **77**; *Л.* и *М. Гандельсман* (Ленинград) **77**; *Е. Горбатый* (Одесса) **77, 84**; *С. Горишний* (Таганрог) **78, 84**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **77**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **77, 78а, 84**; *А. Диденко* (Краснодар) **84**; *Э. Дяченко* (Киев) **77**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **77, 78б, 84**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **78а**; *Д. Зелевинский* (Москва) **84, 85**; *С. Золотарев* (Москва) **77, 78, 84**; *В. Калабин* (Москва) **85**; *И. Калика* (Киев) **84**; *А. Камалян* (Иджеван Арм. ССР) **77, 84**; *П. Кирсанов* (Москва) **77**; *В. Клочков* (Челябинск) **77, 84**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **78, 84, 85**; *Д. Костюк* (Москва) **84**; *А. Косульников* (Москва) **77**; *Т. Кулиев* (Баку) **77**; *Е. Ландман* (Ленинград) **77, 84**; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) **78, 84**; *В. Липкин* (Москва) **84**; *С. Лифиц* (Харьков) **84**; *М. Любич* (Харьков) **77, 84**; *И. Морозов* (Горький) **77, 78**; *В. Нейман* (Ленинград) **79**; *Н. Нецветаев* (Ленинград) **77, 78, 80**; *А. Паламарчук* (Бровары Киевской обл) **84**; *И. Панин* (Ленинград) **77, 80, 84**; *Б. Певзнер* (Москва) **77, 78а**; *А. Плахов* (Москва) **77, 78, 84**; *Р. Портной* (Черновцы) **77, 78а**; *С. Пославский* (Харьков) **78а, 84**; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) **77**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс Саратовской обл.) **84**; *М. Райтер* (Ленинград) **77**; *В. Романов* (Димитровград) **77, 78, 84**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **84**; *Ю. Скрынников* (Руставн) **84**; *С. Соловьев* (Орел) **84**; *А. Соломахов* (Москва) **84**; *Б. Соломяк* (Ленинград) **84, 85**; *В. Тарасов* (Ленинград) **84**; *С. Трегуб* (Ташкент) **84**; *А. Туровский* (Псков) **79, 84**; *Ю. Философов* (Саратов) **77**; *С. Финашин* (Ленинград) **84, 85**; *И. Фомина* (Харьков) **77**; *В. Харатоник* (Польша) **84**; *А. Хомич* (Брест) **84**; *И. Цукерман* (Ленинград) **77, 78, 80, 84, 85**; *М. Чеповецкий* (Ленинград) **84**; *А. Черебатов* (Омск) **77, 84**; *В. Чурук* (Минск) **84**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **77, 80, 84, 85**; *В. Шпильрайн* (Москва) **84**; *А. Шульман* (Киев) **84**; *М. Щербина* (Харьков) **84**; *М. Юмашев* (Железнодорожный Московской обл.) **77**; *И. Юнус* (Харьков) **77, 80**; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **77**; *Б. Яцало* (с. Морочно) **77, 78а, 84**.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф293, Ф297** и **Ф302**. Правильные решения остальных задач прислали: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **5**; *Г. Айзин* (Брест) **4, 9, 0**; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) **0**; *А. Алексеев* (Смоленск) **5**; *К. Андроник* (Кишинев) **4, 6, 9**; *И. Астров* (Таллин) **4**; *А. Баклай* (Пинск) **4**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **0**; *Ю. Богомолов* (Казань) **4, 6, 9, 0**; *И. Борисов* (Одесса) **5**; *В. Борю* (Запорожье) **6, 9**; *И. Винокуров* (Москва) **9**; *О. Вишнепольский* (Рига) **4**; *И. Долинников* (Волгоград) **0**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **4**; *А. Говяда* (Киев) **8, 9, 0**; *О. Годин* (Симферополь) **9, 0**; *А. Гончаров* (Воронеж) **6**; *С. Горишний* (Таганрог) **8, 9, 0, 1**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **9**; *С. Гранин* (Таллин) **5**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **9**; *В. Гуров* (п. Листвянка Рязанской обл.) **9**; *В. Дементьев* (Кировск) **4**; *Е. Демихов* (Усмань) **4**; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **4**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **4, 5, 8, 9, 0, 1**; *Е. Жуков* (с. Волгодоновка Целиноградской обл.) **4, 9**; *И. Заверткин* (Орск) **0**; *В. Иващук* (Киев) **4—6, 9, 0**; *С. Керем* (Рига) **4**; *С. Карташова* (Светлоград) **5**; *Б. Кацман* (Мытищи) **5, 8**; *А. Клочко* (Жуковский) **5**; *Н. Кобылецкий* (Баку) **9**; *Я. Коган* (Глазов) **4, 0, 1**; *А. Козел* (Москва) **5**; *Н. Конев* (Каменск-Шахтинский) **5**; *А. Копнов* (Новочеркасск) **5**; *В. Контарин* (Таллин) **9**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **4—6, 0**; *Д. Корин* (Киев) **4, 0**; *Ю. Коровин* (Курск) **5, 9, 0**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **4—6**; *М. Кроль* (Павловский Посад) **5**; *А. Крохин* (Харьков) **4, 5, 8, 0**; *С. Левитин* (Днепропетровск) **4**; *Ю. Ленгев* (Алма-Ата) **5, 9, 0**; *В. Мадгазин* (Ташкент) **5**; *А. Майоров* (Ярославль) **4**; *С. Матвеенко* (Москва) **4—6, 0**; *С. Мельник* (Харьков) **4—6, 9, 0**; *А. Мишин* (Ленинград) **4**; *В. Моисеев* (Астрахань) **5**; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) **5, 0**; *И. Никитин* (Ленинград) **5**; *Ю. Онищенко* (Люберцы) **9, 0**; *С. Онучин* (Пермь) **8**; *Б. Очиров* (Новосибирск) **9, 0**; *П. Паровичников* (Обнинск) **4**; *В. Пахомов* (Днепропетровск) **4**; *В. Пиотух* (Севастополь) **8, 9**; *А. Поблагуев* (Винница) **4, 6**; *М. Половинник* (Мена) **9**; *А. Полянский* (Челябинск) **4**; *А. Пресман* (Москва) **9**; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) **9**; *Р. Ризнычук* (Львов) **9**; *М. Розман* (Псков) **4, 9**; *А. Рудерман* (Ленинград) **6**; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) **9**; *В. Серебрянный* (Харьков) **9**; *Р. Сирота* (Харьков) **4, 9, 0**; *И. Соколов* (Москва) **9**; *О. Стехин* (Васильков) **4**; *В. Тарасов* (Ленинград) **9**; *Г. Танчишвили* (Тбилиси) **9**; *Н. Федин* (Омск) **4, 5**; *П. Фоменко* (Днепропетровск) **4, 8**; *А. Хомич* (Брест) **4, 6**; *Л. Цимринг* (Горький) **8, 9**; *Г. Ципурский* (Сухуми) **4**; *Ю. Черныш* (Минск) **4—6, 8**; *Е. Шафирович* (Ногинск) **4**; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского края) **9**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **9**; *О. Щербаков* (Лида) **4, 9**.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Институт начинается со школы

К. И. Кашин

Раз уж вы взяли в руки «Квант», то, наверное, решили после окончания школы идти учиться в такое высшее учебное заведение, где один из самых важных предметов — математика. Если это так, то все, что написано в этой небольшой статье,— для вас.

Заканчивая среднюю школу, вы с трудом вспоминаете, как были первоклассником. Вы выросли, созрели и смотрите на нынешних первоклашек несколько иронически (если, конечно, вы не будущий педагог). Ведь они еще не умеют мыслить логически, отвлеченно, да и решать сколько-нибудь сложные задачи им не под силу. Они только слушают, запоминают и рассказывают, причем рассказывают плохо. Вы, конечно, умеете пересказывать гораздо более сложные вещи, потому что вы умеете логически мыслить, доказывать, преобразовывать данные. А они, первоклассники, умеют только слушаться и подражать. Для них все внове, они ко всему еще только присматриваются. Ведь так?

А теперь присмотритесь к себе — будущему студенту технического вуза. Очень скоро вы вновь станете первокласс..., то есть, я хотел сказать, — первокурсником. Вы тоже будете примериваться и присматриваться к преподавателям, стараясь понять, чего они хотят от вас. А хотят они, раз уж вы научились хорошо логически мыслить, дать вам за пять лет знаний во много раз больше, чем в школе вы получили за десять. И знания эти качественно другие — они готовят вас к самостоятельной деятельности.

В институтский учебный процесс входят следующие элементы: лекции; практические занятия; лабораторные занятия; консультации преподавателей, читающих лекции и ведущих практические занятия; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ; зачеты; экзамены. И все эти элементы учебного процесса требуют самостоятельности.

Начнем по порядку, с лекций. Работа студента на лекции делится на три стадии:

1) слушать лекцию;

2) пересказывать для себя мысли, высказанные лектором (стадия эта необходима и потому, что способствует более глубокому пониманию излагаемого материала, и потому, что записать за лектором все, что он говорит, студент попросту не успеет);

3) записывать краткий пересказ (составлять конспект).

Как свидетельствует практика, весьма и весьма значительная часть студентов первых курсов не умеет составлять конспекты лекций. А ведь составление конспекта — очень важная часть работы. От того, как вы с нею справитесь, зависит многое.

Если конспект составлен плохо, то вполне может случиться, что студент из-за нехватки времени на осмысление записей пойдет на экзамен с подготовкой, не гарантирующей благоприятный исход.

Если же конспект составлен хорошо, то во многих случаях оказывается достаточным просмотреть его (даже не заглядывая в учебник), чтобы благо получно сдать экзамен. В других случаях он явится путеводителем по любому учебнику, даже если учебник написан не по программе вашего института.

Так что, если вы хотите в институте сберечь время для занятий своим любимым предметом — математикой, то обязательно научитесь составлять конспекты.

Я не стану учить вас решать задачи, а именно решением задач занимаются на практических занятиях. В «Кванте» вы встречаете много хороших задач, составленных специально для того, чтобы вы получили представление о самостоятельной исследовательской работе. Сравните по полноте ваши собственные решения с теми, которые приведены в журнале. Привыкайте завершать начатое. В институте вам эта привычка очень пригодится.

Лабораторные занятия по математике обычно связаны с выполнением работ на электронных или клавишных вычислительных машинах. Очень может быть, что в вашей школе таких машин нет, а где их искать, вы не знаете.

Однако вы не первоклассник, которого всему учат учителя. Если вы намерены всерьез в будущем заниматься прикладной математикой, вам нужно проявить инициативу, побывать на выставках, где экспонируются ЭВМ, или в научно-исследовательском институте или проектном бюро, где на этих машинах работают, и постараться разобраться, что такое ЭВМ. Здесь вам могут помочь «дни открытых дверей», проводимые весной во многих вузах. В эти дни школьников — будущих студентов — знакомят с институтом.

Зачем нужны в институте консультации? Конечно, не только для того, чтобы преподаватель давал вам советы. Преподаватель советовать умеет, а вот умеете ли вы задавать вопросы? Задавать вопросы очень важно, чтобы проверить, все ли вами понято правильно, нет ли какой-нибудь тонкости, которая ускользнула от вашего внимания. Не надейтесь скромно, что «ваш» вопрос зададут соседи по студенческой скамье, такая скромность не украшает! Хорошо еще, если ваши соседи не поняли того же, чего не поняли вы. А если они не обратили внимания на рассмотренную вами тонкость, то своим молчанием вы оказываете им плохую услугу. Так что лучше, если вы научитесь задавать вопросы уже сейчас, в школе.

Работа на лекциях, на лабораторных занятиях и на консультациях — только часть обучения. Ведь знания, которые вы получаете, нужно пережить, прочувствовать. Это происходит обычно во время выполнения домашних заданий.

Можно надеяться, что в школе во время контрольных работ (а выполняете вы их, конечно, самостоятельно) вы научились трудиться спокойно, внимательно, «спеша медленно» и распределяя время на использование черновика и оформление чистовика. Если это так, то приобретенная привычка вам очень пригодится в институте.

Зачет — это экзамен, на котором ставится одна из двух оценок: «зачет», «незачет». Многие из вас еще не знают, как он выглядит. Сейчас вам достаточно знать, что зачет есть нечто, что почти гарантируется успешным выполнением контрольных работ.

Последний момент учебного процесса — экзамен. Вы его достойно выдержите, если хорошо знаете предмет и серьезно относитесь к указанным моментам учебного процесса.

Знание предмета, приобретенное в средней школе, конечно, тоже вам существенно поможет, но это тема для другого разговора. Сейчас важно, чтобы вы подготовились не только к более интенсивному потоку знаний, который хлынет на вас сразу же, как только вы поступите в институт, но и к учебному процессу, чтобы вы не оказались вновь в роли первоклассника.

Как приступить к решению задачи по физике?

Г. И. Розенблат

Решение физической задачи — весьма сложный процесс. Он требует от решающего глубокого знания физики, умения анализировать задачу и правильно применять для ее решения законы физики и их следствия. Часто бывает полезно привлекать для решения данной задачи опыт прежних решений, проводить аналогии, делать упрощения и т. п.

Трудно (или даже невозможно) разработать универсальные приемы для решения любой физической задачи. Однако можно предложить некоторые общие правила, обеспечивающие наиболее важную часть решения, а именно: *отбор тех законов, которые можно применять для решения*. Об этих правилах, применительно к механическим задачам, и пойдет речь в статье.

При решении задачи учащиеся нередко выбирают тот или иной закон на том основании, что в его формулу входят величины, имеющиеся в условии задачи. Такой подход может привести к серьезным ошибкам. Дело в том, что каждый физический закон имеет определенные границы и условия применимости, то есть его можно применять не всегда. Так, например, закон сохранения импульса можно применять только в том случае, если выполняются одновременно два условия: система отсчета является инерциальной и исследуемая система тел замкнута. Если хотя бы одно из этих условий не соблюдено, закон сохранения импульса использовать для решения задачи нельзя. Таким образом, прежде чем применять какой-либо закон, необходимо проверить, выполняются ли условия его применимости. Причем для каждого закона можно установить определенную последовательность вопросов, на которые нужно ответить, то есть построить «алгоритм распознавания» *). Так, для закона сохранения импульса последовательность вопросов должна быть такой:

1. Является ли система отсчета *инерциальной?*

2. Является ли исследуемая система тел *замкнутой?*

Если система отсчета не инерциальная, закон сохранения импульса не выполняется, даже если рассматриваемая система тел замкнута. Так что порядок вопросов должен быть именно таким.

Приступая к решению конкретной задачи, разумно прежде всего выяснить, какие из *основных* законов физики можно применить. Для механических процессов и явлений это — законы сохранения энергии и импульса, законы Ньютона и т. п. Оказывается, отобрать пригодные для решения задачи законы можно, анализируя условия выполнимости этих законов. При этом порядок постановки вопросов опять-таки должен быть вполне определенным — от наиболее широких границ применимости к наиболее узким. Он может быть, например, таким:

1. Является ли система отсчета *инерциальной?*

2. Можно ли применять законы *классической* механики?

3. Можно ли исследуемые тела считать *материальными точками?*

4. Является ли рассматриваемая система *замкнутой?*

5. Являются ли внутренние силы системы *потенциальными?*

6. Какие *частные* законы механики можно использовать?

*) Алгоритмом называется совокупность действий, выполняемых в строго установленном порядке для решения задач определенного типа.

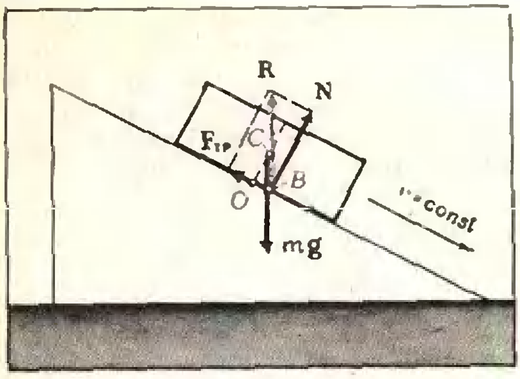


Рис. 1.

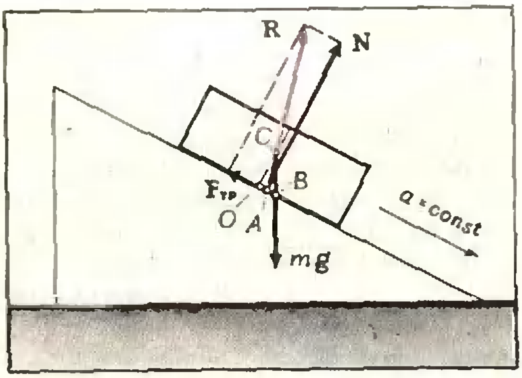


Рис. 2.

Поясним на конкретных задачах, как пользоваться таким «планом» решения задачи.

Задача 1. *Брусок высотой h скользит ускоренно вниз по склону горы. Какая половина бруска, правая или левая, сильнее давит на гору, если поверхность горы шероховатая?*

Анализ. 1) Система отсчета связана с Землей, то есть является практически инерциальной. 2) Скорость бруска, по-видимому, гораздо меньше скорости света в вакууме, а сам брусок является макроскопическим телом — можно применять законы классической механики. 3) Брусок, конечно, нельзя считать материальной точкой в данной задаче, так как в условии говорится о его размерах и рассматривается давление его отдельных частей, — нужно применять законы динамики и кинематики для протяженных тел, в данном случае — для твердого тела. 4) Система тел Земля — брусок замкнута, можно применять закон сохранения импульса. 5) Внутренние силы в системе — силы трения — не являются потенциальными, поэтому закон сохранения механической энергии применять нельзя.

Таким образом, мы установили, какими законами *можно* пользоваться при решении этой задачи. Но это не означает, что все эти законы *нужно* применять. Ни один из законов сохранения не имеет отношения к давлению частей бруска, поэтому следует попытаться решить задачу, используя законы динамики и кинематики твердого тела.

Решение. Брусок движется поступательно, следовательно, равнодействующая всех действующих на него сил проходит через центр масс бруска. На брусок действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, приложенная в центре масс, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная вверх вдоль наклонной плоскости, и сила реакции опоры $\mathbf{N}$, перпендикулярная к плоскости. Равнодействующая $\mathbf{R}$ двух последних сил, приложенных к основанию бруска, также должна проходить через его центр масс.

Если брусок движется равномерно, то сумма всех сил равна нулю, то есть сила $\mathbf{R}$ равна по величине силе тяжести бруска и направлена с ней по одной прямой (рис. 1). Следовательно, сила $\mathbf{R}$, а значит, и сила $\mathbf{N}$, приложены в точке B, которая лежит ниже точки O — середины основания бруска. Согласно третьему закону Ньютона сила давления бруска на гору тоже приложена в точке B. Это означает, что правая часть бруска давит сильнее, чем левая.

Если брусок скользит с ускорением, то равнодействующая всех сил направлена так же, как ускорение, то есть вниз по наклонной плоскости. Значит, сила $\mathbf{R}$ в этом случае отклонена от вертикали вправо на некоторый угол (рис. 2). Проведем через центр масс примерное направление действия этой силы; оно пересечет плоскость в точке A, которая, так же как и точка B, расположена ниже точки O. Следовательно, и в этом случае давление на гору правой половины бруска больше, чем левой.

Задача 2 (подобная задаче Ф278). *Спутник Земли движется по круговой орбите радиуса R_1. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от центра Земли R_2 и минимальным R_1. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения?*

Анализ. 1), 2) — ответы такие же, как в задаче 1. 3) Спутник можно считать материальной точкой — можно применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки. 4) Система тел Земля — спутник замкнута (пренебрегаем взаимодействием с другими космическими телами) — можно применять закон сохранения импульса. 5) Между телами выбранной системы действуют только силы притяжения, которые являются потенциальными, — можно применять закон сохранения механической энергии. 6) Кроме того, движение спутника подчиняется законам Кеплера.

Решение. Рассмотрим сначала спутник на круговой орбите. Законы сохранения не позволяют найти скорость спутника, так как на круговой орбите все состояния спутника равноправны. Поэтому можно пробовать применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки:

$$F=ma, \text{ где } F=\gamma\frac{mM}{R_1^2}$$

(m — масса спутника, M — масса Земли);

$$a=\frac{v_1^2}{R_1}, \quad T=\frac{2\pi R_1}{v_1}$$

(v_1 — скорость спутника на круговой орбите). Тогда

$$v_1=\sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}} \text{ и } T_1=\frac{2\pi R_1}{v_1}.$$

При движении спутника по эллиптической орбите, наоборот, законы Ньютона оказываются неудобными для решения, так как сила тяготения в разных точках орбиты различна. Попробуем применить закон сохранения механической энергии и второй закон Кеплера:

$$\frac{mv_1'^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R_1}=\frac{mv_2^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R_2},$$

$$v_1'R_1=v_2R_2$$

(v_1' — скорость спутника на эллиптической орбите в перигее). Отсюда

$$v_1'=\sqrt{\frac{2\gamma MR_2}{(R_1+R_2)R_1}}=v_1\sqrt{2\frac{R_2}{R_1+R_2}}.$$

Искомое увеличение скорости равно $\Delta v_1=v_1'-v_1$. Период обращения можно найти с помощью третьего закона Кеплера

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{(R_1+R_2)^3}{2^3R_1^3},$$

где $\frac{R_1+R_2}{2}$ — большая полуось эллиптической орбиты.

Итак, окончательно,

$$\Delta v_1=\sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right),$$

$$T_2=\pi(R_1+R_2)\sqrt{\frac{R_1+R_2}{2\gamma M}}.$$

Задача 3 (Ф282). *Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 3. Массы всех шаров m, коэффициенты упругости пружинок k.*

Анализ. 1), 2) — ответы такие же, как в задаче 1. 3) Всю систему нельзя считать материальной точкой (исследуется движение ее частей друг относительно друга). Но каждый шар в отдельности можно считать точкой и применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки. 4) Исследуемая система тел является замкнутой — можно применять закон сохранения импульса. 5) Между телами системы действуют потенциальные силы — силы упругости пружинок —

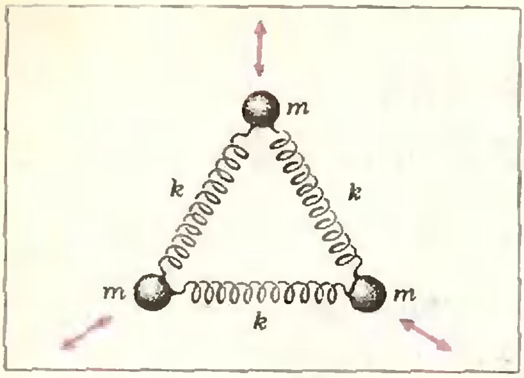


Рис. 3.

можно применять закон сохранения механической энергии. б) Поскольку речь идет о колебаниях, можно применять законы колебаний, в частности, гармонических колебаний (если ограничиться рассмотрением малых амплитуд). Так как в систему входят пружинки, можно использовать сведения о них: прежде всего, закон Гука. Можно также воспользоваться тем, что система симметрична.

Для решения задачи можно использовать законы колебаний совместно с законами Ньютона или с законом сохранения механической энергии.

Решение. Первый способ. Пусть в некоторый момент смещение каждого шара равно x; тогда удлинение каждой пружинки будет равно $x\sqrt{3}$, а сила упругости одной пружинки (по закону Гука) — $kx\sqrt{3}$. Равнодействующая сил упругости двух пружинок, действующих на каждый шар, равна $3kx$. Согласно второму закону Ньютона для этого шара (направим ось x по направлению смещения шара)

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{3kx}{m} = -\frac{3k}{m}x.$$

Сравним полученную формулу с уравнением гармонических колебаний:

$$a_x = -\omega^2 x.$$

Отсюда циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Второй способ. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_1 = E_2.$$

В положении равновесия скорость шаров максимальна, а пружинки не деформированы, то есть $E_1 = K_1 = \frac{3mv_0^2}{2}$ (v_0 — амплитуда скорости). В крайнем положении скорость шаров равна нулю, а смещение максимально и равно амплитуде колебаний A. При этом удлинение каждой пружинки равно $A\sqrt{3}$, поэтому $E_2 = \Pi_2 = 3\frac{k(A\sqrt{3})^2}{2}$. Тогда

$$\frac{3mv_0^2}{2} = 3\frac{k(A\sqrt{3})^2}{2} \text{ и } v_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}A.$$

Используя известное выражение для максимальной скорости гармонических колебаний $v_0 = \omega A$, получим то же выражение для циклической частоты, что и при первом способе решения.

Упражнения

В приведенных ниже задачах установите, какие из основных законов механики *можно* применять в исследуемой ситуации, а также, какие из этих законов *нужно* применить для решения.

1. Самолет массой $m = 2{,}5$ *т* с выключенным мотором спускается, планируя, с высоты $h_1 = 2$ *км* до высоты $h_2 = 1$ *км*, пролетев при этом с постоянной скоростью $v = 144$ *км/ч* расстояние $l = 10$ *км*. Какую мощность N должен развить мотор самолета, чтобы он смог подняться до высоты h_1, пролетев расстояние l с той же скоростью?

2 (Ф228). На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

3. С горки высотой H съехали санки массы m и остановились, пройдя некоторое расстояние. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять санки по тому же пути до первоначальной высоты?

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

(механико-математический факультет, физический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики)

Подробно об этих факультетах МГУ мы рассказывали в «Кванте», 1973, № 4. Здесь мы помещаем варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся поступавшим на эти факультеты в 1974 году, и задачи, предлагавшиеся на устном экзамене по физике.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB+AD=DE$, угол $BAD=60°$ и $AE=6$. Найти площадь треугольника ABC.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC=9$, ребро $DB=AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

5. Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам:

$$x^2+y^2=(111-\alpha)(\alpha-89),$$
$$50(u^2-v^2)=\alpha(15u+5v-\alpha).$$

Вариант 2

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0.$$

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)}\leqslant 1+\log_8(7x^2+14x+8).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к этой окружности до пересечения с продолжением стороны CA в точке D. Известно, что $AB+AD=AC$, отрезок $CD=3$, угол $BAC=60°$. Найти периметр треугольника ABC.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором угол $BAC=60°$, а угол ACB прямой. Грань BCD образует угол в 60° с гранью ABC. Ребро $BD=2$. Сфера касается ребер AB, AC и грани BCD. Центр сферы — точка O — лежит на основании пирамиды и отрезок OD перпендикулярен к плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найти длину ребра AC.

5. Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам:

$$(x+y)(x+y+20)=(140-\alpha)(\alpha-80),$$
$$\alpha(8u^2+2v^2-\alpha)=(4u^2-v^2)^2.$$

Физический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}-x\right).$$

2. Решить неравенство:

$$x^2-2|x+1|<0.$$

3. Решить уравнение:

$$2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0.$$

4. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 распо-

ложены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и угол BCD меньше, чем $\frac{\pi}{3}$. Точка K — середина AC, точка L — середина CE, точка M — середина отрезка прямой BD. Площадь треугольника KLM равна $\frac{\sqrt{3}}{5}$. Найти длину отрезка BD.

5. Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $NKLM$.

Вариант 2

1. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x - 1 = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\cos x - 1).$$

2. Решить неравенство:

$$(|x| - 1)^2 > 2.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{3}{4}\log^3_{\sqrt{3}} x - 30\sqrt{\log_3^3 x} + 36 = 0.$$

4. Из точки K, расположенной вне окружности с центром O, проведены к этой окружности две касательные, MK и NK (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($MC < CN$). Через точку C перпендикулярно к отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B. Известно, что радиус окружности равен R, $\angle MKN = \alpha$, $MC = b$. Найти длину отрезка CB.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Точка D — середина гипотенузы AB, SD — высота пирамиды, $SD = DC = a$. Через точку S проведена плоскость, перпендикулярная к SD, и в этой плоскости построен прямоугольный треугольник SEF так, что точка S — вершина прямого угла, $SE = SF = a\sqrt{2}$, а $EF \parallel AB$. Кроме того, треугольник SEF расположен так, что плоскость, проходящая через EF и AB, пересекает ребро SC. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $SDEF$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения $\sqrt{\sin(1 - x)} = \sqrt{\cos x}$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x - 2| + |x - 3| = 1, \\ 813x - 974 \leqslant 163x^2. \end{cases}$$

4. Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем v и может быть заполнен первым шлангом за 3 часа, вторым шлангом — за 4 часа, третьим шлангом — за 5 часов. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается оконченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 часов. Если бы резервуары сообщались, заполнение окончилось бы через 4 часа. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине B и C равны $180°$ и $SA = BC$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 *см²*, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3 *см*.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos(2 + x)},$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$(0{,}5)^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leqslant (0{,}25)^{\frac{1}{(3-x)^2}}$$

является решением неравенства

$$16a^4x^2 - 9 \leqslant 0.$$

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x + 5| = |x + 2| + 3, \\ 1114 + 279x \leqslant 139x^2. \end{cases}$$

4. В порту для загрузки танкеров имеется три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку проводить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру — второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше и тогда подключенный

к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC, если $BC = 4$ *см*, $AC = 5$ *см*, $AB = 6$ *см*.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На концах легкого стержня длиной $l = 20$ *см* помещены два шарика, первый из свинца ($\rho_1 = 11{,}3$ *г/см*^{3}), а второй из алюминия ($\rho_2 = 2{,}7$ *г/см*^{3}). Стержень шарнирно закреплен посередине и опущен в воду, где он находится в равновесии. На сколько нужно передвинуть по стержню второй шарик, чтобы равновесие восстановилось в воздухе?

2. Шарик массы $m = 200$ *г* может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2$ *с*$^{-1}$. К шарику прикреплена пружина, другой конец которой закреплен на оси. Длина пружины в недеформированном состоянии $l = 20$ *см*. Определить абсолютное удлинение пружины Δl. Жесткость пружины $k = 4$ *н/м*.

3. Свинцовая пуля массы $m = 10$ *г*, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ *м/с*, попадает в кусок свинца массы $M = 1990$ *г* и застревает в нем. Свинец лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Найти, на сколько градусов Δt нагреется свинец. Передачу тепла окружающим телам не учитывать. Теплоемкость свинца $c = 1{,}2 \cdot 10^2$ *дж/кг·град*.

4. Цилиндрический сосуд высотой $l = 40$ *см* разделен на две части невесомым тонким поршнем, скользящим без трения. Поршень находится на высоте $h = 26{,}7$ *см* над дном цилиндра. Под поршнем находится водород, а над ним газ с неизвестной молекулярной массой μ. Узнать μ газа, если его масса равна массе водорода.

5. Пять конденсаторов объединены в цепь, показанную на рисунке 1. Емкости конденсаторов 1, 2, 3 одинаковы и равны: $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ *мкф*. Емкости конденсаторов C_4 и C_5 равны 4 *мкф*. К точкам A и B приложено напряжение $u = 100$ *в*. Определить заряды q_4 и q_5 на четвертом и пятом конденсаторах.

6. Проводник длины $l = 0{,}1$ *м* может без трения скользить по двум проводящим параллельным рейкам, соединенным сопротивлением $R = 0{,}1$ *ом*, в однородном магнитном

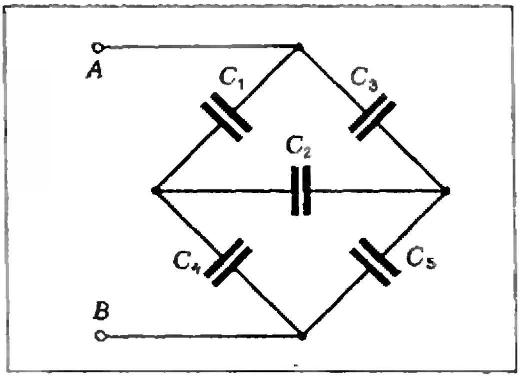


Рис. 1.

поле, индукция которого $B = 0{,}05$ *тл* перпендикулярна к плоскости реек. Какую силу нужно приложить к проводнику, чтобы он двигался равномерно со скоростью $v = 1$ *м/с*?

7. Размеры изображения предмета в вогнутом зеркале в $m = 2$ раза меньше, чем размеры самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $d = 15$ *см*. Чему равен радиус кривизны зеркала?

Физический факультет

1. Космический корабль находится на расстоянии $h = 20\,000$ *км* от поверхности Земли и в системе координат, связанной с Землей, имеет скорость $v_1 = 6$ *км/с*, направленную по радиусу от центра Земли. Двигатели не работают. Упадет ли корабль на Землю или улетит в космическое пространство? Влиянием Солнца, Луны и планет пренебречь. Радиус Земли равен $R_0 = 6400$ *км*, $g_0 = 10$ *м/с*^{2}. Что произойдет, если при тех же условиях скорость корабля $v_2 = 5$ *км/с* или $v_3 = 4$ *км/с*?

2. Три одинаковых тела начинают скользить по абсолютно гладкой неподвижной шаровой поверхности радиуса R из положения, когда третье тело находится на полюсе шара. Тела соединены невесомыми и нерастяжимыми нитями одинаковой длины $l \ll R$.

а) Определить начальное ускорение a этой системы тел.

б) Определить, при каком минимальном коэффициенте трения k между телами и шаровой поверхностью тела не сдвинутся с места.

3. Цилиндрический стакан плавает в воде так, что его края находятся у поверхности, когда он наполовину заполнен водой. Вынув стакан и вылив из него воду, погружают его вверх дном на такую глубину h, где он находится в равновесии (неустойчивом) — не всплывает и не тонет. Определить глубину h, отсчитывая ее от уровня воды в стакане. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м*^{2}. Толщиной дна и стенок стакана пренебречь. $g = 10$ *м/с*^{2}.

Рис. 2.

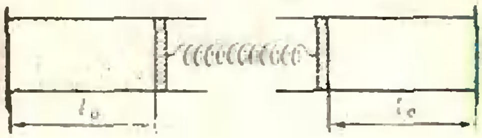


Рис. 3.

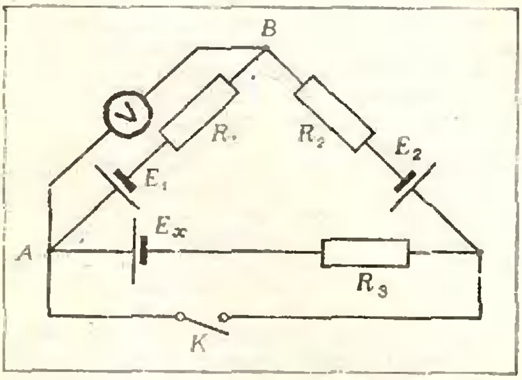


Рис. 4.

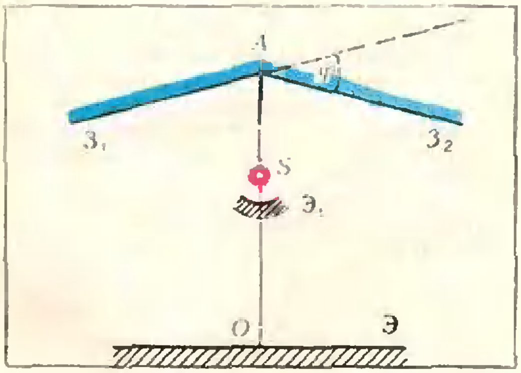


Рис. 5.

4. На абсолютно гладкой поверхности неподвижно лежат две одинаковые шайбы 1 и 2 массой M каждая. Между ними на линии, соединяющей центры этих шайб, имеется шайба 3 массой $M/4$ (тех же размеров), которая движется со скоростью v в направлении второй шайбы (рис. 2). Считая столкновения шайб абсолютно упругими, определить по величине и направлению скорости всех трех шайб после того, как столкновения прекратятся.

5. Между поршнями двух одинаковых неподвижных цилиндров, заполненных одинаковым газом, вставлена пружина (рис. 3). В исходном состоянии расстояние между поршнями и дном цилиндров равно l_0, начальная температура T_1. Затем газ в обоих цилиндрах был нагрет до температуры T_2, при этом давление в них возросло в n раз.

Найти, насколько изменилась длина пружины.

6. В сосуд объемом $V = 10$ *л*, наполненный воздухом при давлении $p_0 = 1$ *ат* и температуре $t_0 = 0\ ^\circ C$, накачивают дополнительно массу $m = 4$ *г* азота при температуре $0\ ^\circ C$. Сосуд закрывают и нагревают до температуры $t_1 = 100\ ^\circ C$. Определить давление p_x смеси газов в сосуде при этой температуре. Для азота $\mu = 28$.

7. Имеются два точечных заряда: отрицательный — q с массой m и положительный $+Q$ с массой M. На каком расстоянии d друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью E они ускорялись как одно целое (т. е. не изменяя взаимного расположения)?

8. Электрическая цепь состоит из батарей с э. д. с. E_1 и E_2, сопротивлений R_1, R_2 и R_3 и неизвестной батареи E_x, включенных, как показано на рисунке 4. К участку AB подключен вольтметр V с большим внутренним сопротивлением. Определить, при каком значении э. д. с. E_x неизвестной батареи показания вольтметра не изменяются при замыкании ключа K. Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

9. Узкая светящаяся щель S расположена параллельно ребру малого (несколько минут) двугранного угла φ, образованного плоскими зеркалами $З_1$ и $З_2$, на расстоянии $AS = r$ от этого угла (рис. 5). На расстоянии $AO = L \gg r$ от ребра угла помещен экран Э. Определить угол 2α, под которым выходят из щели лучи, сходящиеся после отражения в центре экрана (точка O). Дополнительный экран $Э_1$ закрывает прямой пучок лучей от источника S.

10. Человек смотрит в вогнутое сферическое зеркало и видит прямое изображение своего глаза. Угловой размер этого изображения в $N = 1{,}8$ раза больше, чем угловой размер изображения, которое получилось бы в плоском зеркале, помещенном на таком же расстоянии $a = 24$ *см*. Определить радиус кривизны R вогнутого зеркала.

11. В воздухе длина волны монохроматического света $\lambda_0 = 6000$ Å. При переходе в стекло длина волны меняется и становится равной $\lambda_1 = 4200$ Å. Под каким углом φ свет падает на плоскую границу раздела воздух — стекло, если отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол?

Ж. М. Михайлов,
В. Н. Слудский,
А. В. Устинова

ИНФОРМАЦИЯ

ФАЛТ — что это такое?

Редакция получает много писем с просьбой рассказать об институтах, готовящих специалистов для различных областей науки и техники, где необходимы фундаментальные знания математики и физики.
Многих наших читателей интересует Московский физико-технический институт. В 1972 году в нашем журнале была напечатана статья, в которой рассказывалось об МФТИ («Квант», 1972, № 6). В этом институте семь факультетов. Сегодня мы публикуем рассказ о факультете аэромеханики и летательной техники. Этот материал подготовил доцент факультета А. Л. Стасенко.

Московский ордена Трудового Красного Знамени физико-технический институт готовит научных работников по новейшей технике и современной физике для институтов Академии наук СССР, отраслевых научно-исследовательских институтов и конструкторских бюро.

Уже со второго года обучения студенты МФТИ постепенно включаются в работу коллективов ученых, а дипломные работы студентов, как правило, входят в план научно-исследовательских работ соответствующей лаборатории или института. Понятно, что очень важно приблизить студента к базовому институту даже территориально. Здесь мы расскажем об одном из факультетов МФТИ — факультете аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ), — где эта проблема решена, пожалуй, идеально.

Первое слово предоставляем декану факультета профессору Л. А. Симонову:

«Наш факультет был организован в 1965 году. Для него был построен специальный учебный корпус и общежитие для студентов.

Летательная техника за последние 25 лет прошла путь от поршневой до сверхзвуковой реактивной авиации, до ракетной техники. Авиация заняла ведущее положение в пассажирском и грузовом транспорте, и надо ожидать ее дальнейшего развития.

Предстоит освоение полета на скоростях, превышающих достигнутые сверхзвуковые скорости, вплоть до орбитальной скорости полета, с использованием воздушной среды на всех высотах.

Методы решения научных проблем летательной техники могут быть теоретическими и экспериментальными.

Выпускник ФАЛТ должен владеть обоими методами — и теорией, и экспериментом.

ФАЛТ дает сведения на современном уровне об аэродинамике, газодинамике, механике полета, прочности применительно к летательным аппаратам различного типа и к их силовым установкам».

А вот что рассказывают руководители ведущих кафедр института.

Заведующий кафедрой аэрогидродинамики профессор В. В. Сычев:

«Предметом изучения аэрогидродинамики является движение жидкостей и газов. Человек всегда искал объяснений наблюдаемым закономерностям в течениях рек, полете птиц, порывах ветра и волнении моря. Но, пожалуй, только попытки создания первых летательных аппаратов тяжелее воздуха со всей остротой поставили вопросы о необходимости систематических исследований в этой области с целью создания строгой математической теории, объясняющей возникновение подъемной силы и гидродинамического сопротивления.

Теоретические исследования в области механики жидкостей и газов опираются на многие разделы математики. Некоторые из них вообще возникли на «гидродинамической» почве — это, например, векторный и тензорный анализ, ряд разделов теории функции комплексного переменного и, особенно, методы исследования и решения нелинейных уравнений с частными производными, так как с последними (кроме общей теории относительности) имеет дело только механика жидкостей и газов».

Заведующий кафедрой механики полета, профессор, член-корреспондент АН СССР Г. С. Бюшгенс:

«На кафедре механики полета готовят специалистов трех профилей.

1. Аэродинамика летательных аппаратов. Задача исследователей этой специальности — разработка проблем аэродинамики крыльев и других элементов летательного аппарата, отработка аэродинамики аппарата в целом; разработка

Был бы двигатель . . .

методов расчета аэродинамических характеристик, выбор основных параметров самолетов, ракет, орбитальных и космических аппаратов.

2. Динамика летательных аппаратов. Задача исследователей — проблемы динамики, в первую очередь устойчивость, управляемость движений; изучение траекторий — их оптимизация. Разработка принципов автоматического управления летательного аппарата.

3. Оптимизация летательных аппаратов. Задача исследователей в этой области — разработка методов поиска оптимальных решений при создании летательного аппарата.

Цифровые вычислительные машины открыли в этом отношении большие возможности, и разработка необходимых алгоритмов поиска оптимальных решений — здесь одна из главных задач.

Кафедра механики полета уделяет большое внимание методике и практике экспериментальных исследований, а также методологии использования их результатов».

Заведующий кафедрой авиационной автоматики и автометрии профессор М. А. Тайц:

«Создаваемые в настоящее время системы автоматического управления самолетов и других летательных аппаратов — это сложнейшие комплексы, включающие бортовые и наземные системы управления. При их создании используются новейшие достижения электроники и других областей науки и техники. Взаимодействие этих систем должно в ряде случаев обеспечивать практически полностью автоматизированное решение всех задач, возлагаемых на летательные аппараты. Создание и отработка этих систем немыслимы без глубоких теоретических исследований в различных областях науки и широких экспериментальных исследований.

Вторым важным направлением нашей работы является автометрия — сравнительно молодая отрасль науки, изучающая основы построения современных измерительных систем для сбора, переработки, хранения и выдачи информации».

У природы стоит поучиться.

Заведующий кафедрой общей физики ФАЛТ профессор В. Н. Жигулев:

«Физика на физтехе — главный предмет! Единство физики и техники для современной науки и производства очень четко отражено на физтехе.

Современная летательная авиационная и ракетная техника использует новейшие физические достижения. Поэтому будущий специалист, выпускник ФАЛТ, должен обладать широким объемом физических знаний.

На первом курсе студенты ФАЛТ изучают механику, куда включены вопросы специальной теории относительности, релятивистской динамики и теории поля, молекулярную физику и термодинамику, где рассматриваются основы статистической физики и физической кинетики. На втором курсе параллельно изучаются курсы «Колебания и волны» и «Электричество и магнетизм». Раздел «Колебания и волны» в курсе общей физики является оригинальным, здесь изучаются физические явления и процессы, родственные в смысле физической (колебательной и волновой) формы движения. Заключительный раздел «Квантовая физика» представляет собой годовой курс, охватывающий вторую половину второго курса и первую половину третьего курса. Здесь студенты изучают основные положения современной теории атома и ядра, а также физики твердого тела, квантовой статистики и физики излучения.

Заместитель заведующего кафедрой высшей математики МФТИ доцент В. М. Шалов:

«Студенты МФТИ изучают следующие обязательные математические дисциплины: математический анализ, аналитическую геометрию, основы линейной алгебры, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теорию функций комплексного переменного, теорию вероятностей.

Кроме того, на III—IV курсах студенты всех факультетов изучают основы вычислительной математики и программирование. Все студенты проходят практику на современных ЭВМ, изучают алгоритмические языки «АЛГОЛ» и «ФОРТРАН».

Проверим прочность.

Для студентов старших курсов и аспирантов МФТИ читается также свыше 20 специальных математических курсов, среди которых обучающийся может выбрать себе спецкурс по желанию, в соответствии с задачами своей будущей специальности и своими научными интересами.

Кафедра высшей математики МФТИ работает в тесном контакте с Математическим институтом имени В. А. Стеклова АН СССР, с Вычислительным центром АН СССР. Это ведущие научные центры страны, и в них студенты соответствующих специальностей МФТИ слушают лекции крупных ученых, проходят практику».

В заключение — несколько слов заместителя секретаря партбюро ФАЛТ А. В. Гусева:

«С момента образования факультета комсомольцы ФАЛТ были его активными строителями, при их непосредственном участии факультет стал неотъемлемой частью физтеха.

Сделано немало, но сколько еще предстоит! И везде, во всех делах нам нужны горячие комсомольские сердца и умелые руки молодых. Именно вам предстоит завтра продолжать и приумножать то хорошее, что имеем мы сегодня. И нам сегодня совсем не безразлично, кто же будет на физтехе завтра. Поэтому не теряй времени, незнакомый друг! До встречи на физтехе. До встречи на ФАЛТ».

Адрес института и приемной комиссии: г. Долгопрудный Московской области, МФТИ.

Проезд электропоездом до станции Долгопрудная или Новодачная Северной ж. д. (с Савеловского вокзала).

Телефоны приемной комиссии: 216-67-40 (прямой) или (через коммутатор) 216-00-05, доб. 2-17.

А. Л. Стасенко

ШКОЛА-ИНТЕРНАТ ПРИ ЛЕНИНГРАДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМ. А. А. ЖДАНОВА

Вот уже более 11 лет работают специализированные школы-интернаты при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском университетах. В этих школах учатся старшеклассники (8—10 классы), проявившие интерес и склонности к изучению математики, физики, химии, биологии.

Расскажем более подробно про школу-интернат при Ленинградском университете. В нее принимаются учащиеся, окончившие седьмой или восьмой класс, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР.

Собеседование с желающими поступить в школу-интернат проводится на областных, зональных, республиканских и Всесоюзных олимпиадах. Кроме того, в июне в каждом областном и республиканском центре проводятся экзамены по профилирующим предметам для всех желающих поступить в школу-интернат. Сроки этих экзаменов можно узнать в областном отделе народного образования или Министерстве просвещения соответствующей республики.

Подавляющее большинство выпускников школы-интерната продолжают образование в Ленинградском университете.

Большое внимание уделяется различным олимпиадам. В проведении олимпиад уже сложилась определенная традиция. Мы проводим олимпиады новичков, I тур общешкольных олимпиад, в которых участвуют все ученики школы-интерната, II тур, задачи которого по уровню трудности близки к задачам Всесоюзных олимпиад.

Учащиеся школы-интерната успешно выступают на Всесоюзных олимпиадах. Достаточно сказать, что они более шестидесяти раз становились победителями и призерами этих олимпиад. Пятнадцать раз учащиеся школы-интерната становились победителями и призерами Международных олимпиад.

Приглашаем всех любителей математики и физики в нашу школу!

Наш адрес: 197228, г. Ленинград, ул. Савушкина, дом 61, ФМШ при ЛГУ.

А. А. Быков, Ю. И. Ионин

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Ира, Таня, Коля и Леня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех.
Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

2. В сосуд, в котором находится 50 *г* льда при температуре —10°С, наливают 100 *г* воды, температура которой +10°С. Какой станет температура воды в сосуде? Теплоемкостью и теплопроводностью сосуда пренебречь.

3. Доказать, что $1^n+2^n+3^n+4^n$ делится на 10 тогда и только тогда, когда n не делится на 4.

4. На столе лежит гвоздь с маленькой тяжелой шляпкой. Как надо подвигать к нему подковообразный магнит, чтобы шляпка и острие прилипли к магниту одновременно?

5. Сколькими способами, продвигаясь от буквы к букве, можно прочитать слово «Треугольник»? На рисунке показан один из маршрутов. Сможете ли вы сосчитать все возможные пути?

Рисунки Э. Назарова

ПРО СЧЕТЫ

О. П. ЧОПЕНКО

Как вы думаете, сколько лет счетам? 100? 200? 300? Оказывается, намного больше! Прародитель счетов — он называется *абак* — был известен еще в Древней Греции. Правда, это были далеко не привычные нам счеты, а обыкновенная доска, посыпанная тонким слоем темного песка, на котором можно чертить пальцем или заостренной палочкой. По преданию, Архимед был убит римским солдатом, когда он занимался расчетами на такой «песочной доске».

Более поздним видом счетов, известным уже в IV веке до н. э., была «счетная доска» (такими досками пользовались и в эпоху Возрождения). Впрочем, есть основания предполагать, что такие доски были известны и раньше и что ими пользовались в XVIII веке до н. э. в Вавилоне. Сохранилось несколько изображений счетной доски, и одна греческая счетная доска была найдена на острове Саламин (рис. 1). Счетная доска — это прямоугольник, расчерченный параллельными линиями, представляющими разряды числовой системы, как правило, десятичной. Линии чертили на пергаменте, вырезали на дереве, гравировали на мраморе, а иногда даже вышивали на сукне. По этим линиям передвигали незакрепленные фишки, и таким образом производили простые вычисления. Фишками могла быть круглая галька или что-нибудь похожее, и от латинского слова *calculus* — галька — возникло слово *калькуляция* (вычисление стоимости товара, подсчет издержек и т. п.).

Счетная доска замечательна не только тем, что с ее помощью можно было производить арифметические операции. Не менее замечательно то, что на счетной доске числа делили на разряды и производили с ними операции так же, как мы производим их сейчас. В то же время, когда нужно было производить вычисления на бумаге, вернее, на пергаменте или папирусе, эти же вычисления производились с числами, записанными чрезвычайно неудобным образом. Попробуйте, например, сложить два боль-

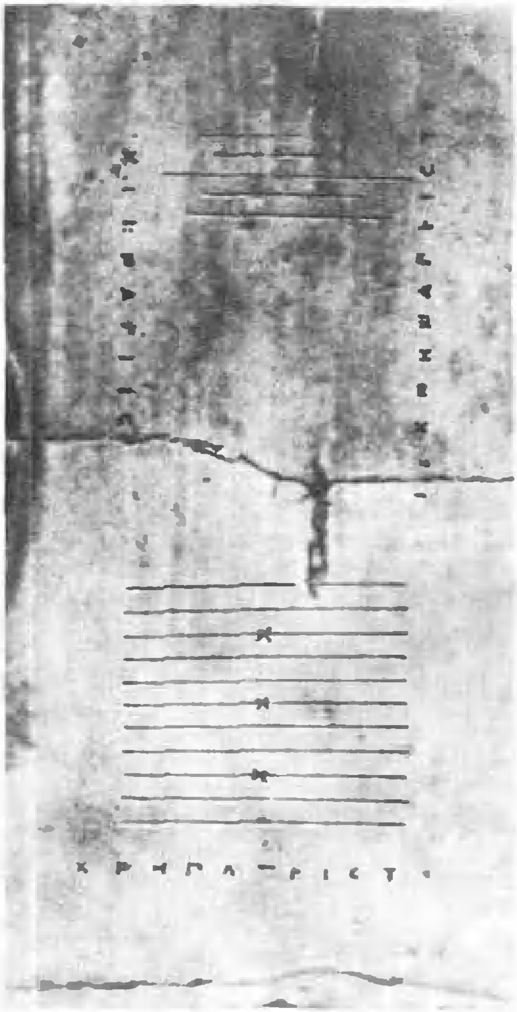


Рис. 1.

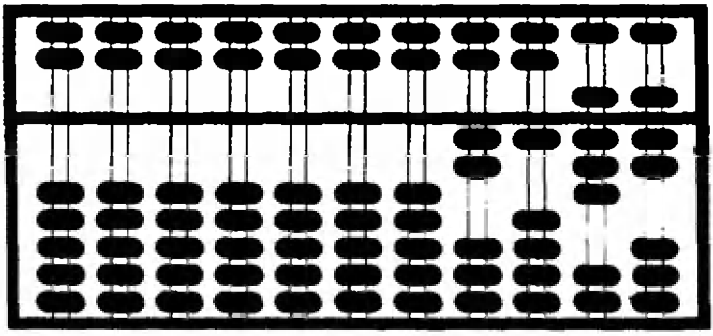


Рис. 2. Суан пэн
Отложено число 2187.

них числа, записанных римскими цифрами. Вы сразу убедитесь, что это намного труднее, чем сложить числа в обычной записи. А умножение и деление становятся просто непосильными операциями! Именно поэтому более XV веков в Европе почти все вычисления делались на счетах. Таким образом, одновременно существовали два способа обозначения чисел — один, крайне громоздкий и неудобный, применявшийся при записи чисел, и второй, вполне удобный и практичный, применявшийся при подсчетах. Этот второй способ, по сути дела, не отличается от привычного для нас современного способа записи. По-видимому, не счеты возникли после изобретения позиционной системы счисления, а позиционная система возникла благодаря счетам.

Первым, кто ввел в Европе индо-арабскую систему обозначения чисел, был Леонардо из Пизы, известный под именем Фибоначчи. Он изложил ее в своей прекрасной книге «*Liber Abaci*» (1202 год). Распространение арабских цифр в Европе привело к появлению *алгористов* — вычислителей, которые полностью отказались от римской системы обозначения чисел ради более совершенной индо-арабской системы. Название *алгорист* происходит от имени арабского математика IX века Аль-Хорезми и является предшественником современного слова *алгоритм*. *Абакисты*, которые придерживались в письменных вычислениях римских цифр, а считали в основном на счетах, и алгористы часто состязались между собой в скорости вычислений. На рисунке, взятом из изданной в 1504 году книги «*Margarita philosophica*» (см. вторую страницу обложки), вы видите такое состязание.

Оптовые торговцы вскоре обнаружили, что новые цифры чрезвычайно удобны для ведения счетов. Однако в некоторых европейских странах пользоваться ими было запрещено законом, так что применять арабские цифры можно было лишь подпольно. Например, в 1299 году во Флоренции появляется указ, запрещающий употреблять арабские цифры, и даже в 1594 году в Антвéрпене купцам не разрешают писать арабские цифры в контрактах и векселях. С цифрами велась борьба даже в некоторых арабских странах. Новая система записи чисел окончательно победила лишь в XVI—XVII веках, когда началось массовое производство бумаги, а вскоре арабские цифры приобрели стандартное начертание благодаря книгопечатанию.

Но вернемся к счетам. Современные счеты — это, по существу, видоизмененная счетная доска, на которой фишки скользят по проволоке или стержням. В настоящее время используются три вида счетов: китайский *суан пэн*, японский *соробан* и русские *счеты*.

У китайского суан пэна (рис. 2) косточки скользят почти без трения по бамбуковым стержням. На каждом стержне помещается пять бусин (единиц) под разделителем и две (пятерки) — над разделителем. На рисунке 3 вы видите китайский иеро-

算

Рис. 3.

глиф «суан» — «исчислять». Он изображает счеты, которые держат два иероглифа «рука» над иероглифом «бамбук».

Происхождение суан пэна неизвестно. Его точное описание восходит к XVI веку, но он, несомненно, появился на много столетий раньше.

Японский соробан (рис. 4) также восходит к XVI веку, когда он, по всей вероятности, был заимствован из Китая. Косточки у него с заостренными краями: два конуса, соединенные в основаниях. На каждом стержне имеется лишь одна косточка (пятерка) над разделителем (эту область японцы называют *небом*), и только четыре косточки (единицы) внизу — на *земле*. Устройство первоначально имело пять косточек внизу, как на китайском суан пэне, но пятую выбросили около 1920 года.

В Японии до сих пор проводят ежегодные состязания в счете на соробане. Нередко проводились состязания между японскими или китайскими вычислителями на счетах и американскими — на арифмометре. Самое известное подобное состязание состоялось в 1946 году, когда рядовой Томас Вуд померялся силами с Киоси Мацузаки. Оказалось, что Мацузаки выполнил все расчеты, кроме умножения огромных чисел, быстрее.

Русские счеты резко отличаются от восточных. Возможно, они позаимствованы у арабов. До сих пор такие же счеты используются кое-где в Индии и на Ближнем Востоке, где турки называют их *кульба*, а армяне — *хореб*. Стержни с четырьмя косточками, которые вы видите на рисунке 5, используются для подсчета дробных частей рублей и копеек.

Лучше всего счеты приспособлены для сложения и вычитания. Умножение и деление на счетах осуществляется с помощью многократного повторения этих операций. Сложение и вычитание на счетах делается так же, как на бумаге при выполнении операций столбиком. Чтобы быстро считать на счетах, движения пальцев должны быть совершенно автоматическими: останавливаться и соображать нельзя! Если хорошо изучить движения пальцев, нужные для сложения, то движения, нужные для вычитания, можно не разучивать. Дело вот в чем. Пусть, например, нужно вычесть 9 213 из 456 789:

$$456\,789 - 9\,213 =$$
$$= 456\,789 + 786 - 9\,999 =$$
$$= 456\,789 + 786 + 1 - 10\,000.$$

Таким образом, мы свели вычитание к сложению и вычитанию некоторой степени десяти. (Разберитесь

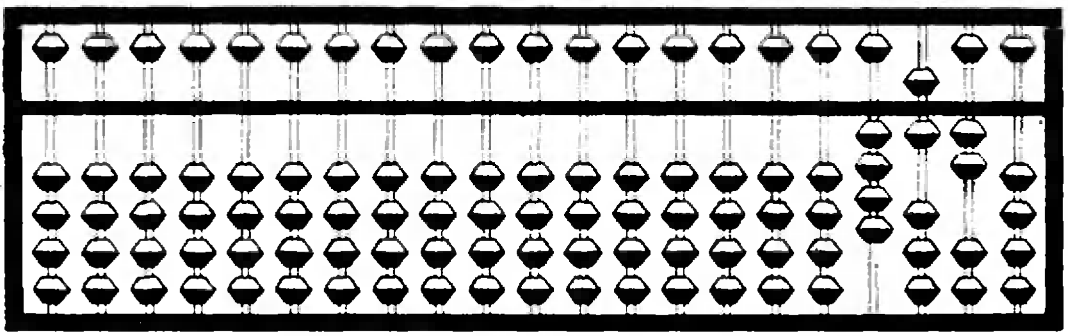


Рис. 4. Соробан. Отложено число 4620.

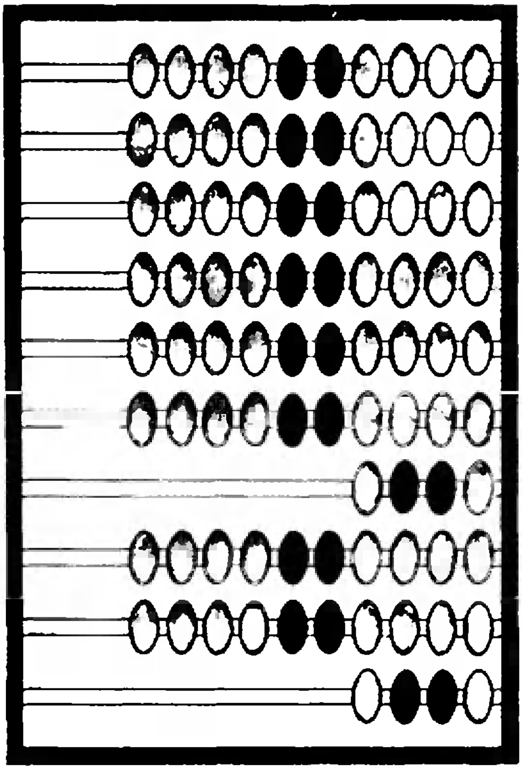


Рис 5

самостоятельно, как следует действовать в случае произвольных чисел.)

Этот метод называется методом вычитания путем добавления дополнений. Он используется и в быстродействующих ЭВМ. Здесь его применять особенно просто, поскольку машины работают в двоичной системе счисления. Примените этот метод и в числовой системе с любым основанием. Постарайтесь понять, как он будет выглядеть в случае системы с основанием q. (Разумеется, это задание относится только к тем, кто знает, что такое система с основанием q. Если вы этого не знаете, советуем вам прочитать статью «Системы счисления», напечатанную в «Кванте» № 6 за 1970 год.) Кстати говоря, на счетах тоже можно производить операции с числами, записанными и не в десятичной системе. Например, при подсчетах с двоичными числами нужно пользоваться самой левой косточкой в каждом ряду, с троичными — двумя левыми косточками и так далее. При работе с десятичными числами можно обойтись девятью косточками, а все десять косточек нужны только для одиннадцатиричной системы счисления.

Отличное практическое упражнение в сложении на счетах связано с таким числовым фокусом. Вы пишете «волшебное» число 12 345 679 и просите кого-нибудь из присутствующих назвать любую цифру. Допустим, названа цифра 7. Тогда вы предлагаете умножить волшебное число на 63. Оказывается — надо полагать, к всеобщему развлечению,— что произведение состоит из одних семерок (чтобы определить множитель, нужно попросту умножить названное число на 9).

Вот как можно использовать это «волшебное» число для упражнения на счетах. Положите на счетах 12 345 679 и прибавьте к нему это же число восемь раз. Если вы не допустили ошибок при этих сложениях, то вы получите на счетах число, состоящее из одних единиц. Сложите «волшебное» число еще девять раз и получите число из двоек, еще девять раз — из троек. Наконец, после 80 сложений вы должны получить число из одних девяток. Это упражнение замечательно тем, что с его помощью легко проверить точность работы на каждом из девяти этапов.

Кроме 12 345 679 есть еще бесконечное множество «волшебных» чисел. Например, $37 \times 3 \times d$, где d — однозначное число, состоит из одних d. Наименьшее волшебное число для семи — 15 873; для 13 — 8 547, для 99 — 1 122 334 455 667 789. Найдите самостоятельно наименьшее «волшебное» число для 17. Постарайтесь разобраться, для каких чисел можно указать «волшебное» число, а для каких — нельзя.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Как приступить к решению задачи по физике?»

1. $N = 2mgv \dfrac{h_1 - h_2}{l} = 200$ *квт*. Можно использовать законы Ньютона и уравнения кинематики точки, а также закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Соответственно возможны два способа решения.

2. $v_0 > \sqrt{2\mu g L \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}$. Можно использовать: а) законы Ньютона и уравнения кинематики точки для доски и бруска в отдельности, б) закон сохранения импульса для системы доска — брусок, в) закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Возможны два способа решения: первый с использованием законов а) и б), а второй — законов б) и в).

3. $A = 2\,mgH$. В исследуемой ситуации можно использовать законы Ньютона и кинематику точки, а также закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Поскольку профиль горки неизвестен, записать законы Ньютона нельзя. Для решения следует применить закон сохранения энергии.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $x = \pi + 2\pi n;\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$,

где n, k — любые целые числа.

Указание. Не забудьте, что $\cos x \leqslant 0$.

2. $-1 \leqslant x < 1;\ 1 < x \leqslant 3$.

3. $S_{ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. Указание. Легко получить систему уравнений:

$$\begin{cases} AB + AD = DE, \\ AD \cdot DE = BD^2, \end{cases}$$

где BD^2 можно выразить по теореме косинусов из $\triangle ABD$.

4. $V_{ABCD} = 36$.

Указание. Пусть O — центр сферы, M, L, K — точки ее касания граней ABC, ABD и ребра CD соответственно, P — точка пересечения плоскости OML с ребром AB. Тогда $OMPL$ — квадрат со стороной 2 (докажите!), поэтому $DL = 2LP = 4$ и $KD = DL = 4$ как касательные, проведенные из точки D к сфере. Аналогично $CK = CM = 5$. Пусть N — точка пересечения ребра AC с прямой, проходящей через M параллельно AB. Обозначив AC через x, выразив через x отрезки NC и NM и написав теорему Пифагора для треугольника NCM, найдем, что $AC = 6$, $AB = 6$.

5. $\alpha = 100$. Указание. Из первого равенства получаем: $89 \leqslant \alpha \leqslant 111$. Найдя α из второго равенства, докажем, что α — целое число, кратное 5.

Вариант 2

1. $x = \pi n;\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, где n, k — любые целые числа.

2. $x \leqslant -2;\ x = -1;\ x \geqslant 0$.

3. $P_{ABC} = 3 + \sqrt{3}$.

Указание. $\triangle ABD \backsim \triangle BCD$.

4. $AC = \dfrac{5}{4}$.

Указание. Пусть K и M — точки касания сферы с ребром AC и гранью BCD соответственно, и пусть радиус сферы равен r. Так как AO — биссектриса угла BAC, то $AK = r\sqrt{3}$. Пусть $OP \perp BC$ (точка P лежит на BC), тогда точки D, M и P лежат на одной прямой и $DP \perp BC$, $\angle DPO = 60^\circ$. Так как $OM = r$, из $\triangle ODP$ легко выразить через r OP и DP, а затем и BP. После этого из $\triangle DPB$ находим $r = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\alpha = 100$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $x = \dfrac{2\pi}{3} \pm \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, где n — любое целое число.

2. $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$.

3. $x = 2^{-8};\ x = 2^{27}$.

4. $BD = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Указание. Обозначив $\angle EAC$ через φ, легко выразить через φ отрезок KL и высоту в $\triangle KML$, а затем и его площадь, равную $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, откуда $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

5. $\frac{a^2\sqrt{2}}{54}$. Указание. Если спроектировать основания пирамид на плоскость одного из них, получатся два правильных треугольника с общим центром, повернутые вокруг него друг относительно друга на $60°$ (см. рис. 1). Легко понять, что боковые ребра каждой из пирамид «протыкают» боковые грани другой в центрах этих граней. Поэтому общая часть пирамид состоит из двух пирамид, все ребра которых равны $\frac{a}{3}$, и тела, изображенного на рисунке 2. Это тело состоит из двух правильных четырехугольных пирамид, все ребра которых также равны $\frac{a}{3}$. На рисунке 2 O_1, O_2, O_3 — центры граней ASC, BSC и ASB соответственно; P_1, P_2, P_3 — центры граней LNK, KNM и MNL соответственно; общее основание указанных пирамид заштриховано. Эти пирамиды составляют правильный октаэдр со стороной $\frac{a}{3}$.

Вариант 2

1. $x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$, где n — любое целое число.

2. $x > 1 + \sqrt{2}$; $x < -1 - \sqrt{2}$.

3. $x = 3^{\sqrt[3]{4}}$; $x = 3^{\sqrt[3]{9}}$.

4. $BC = \sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Указание. Заметив, что KO — биссектриса угла MKN и что $\angle OMN = \angle MNO = \frac{\alpha}{2}$, из $\triangle OMC$ найдем OC. Около четырехугольника $BCON$ можно описать окружность, поэтому $\angle CBO = \angle CNO = \frac{\alpha}{2}$. Теперь из прямоугольного треугольника BCO легко найти ответ.

5. $\frac{a^3}{18}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. $x = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2}$. Указание. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем после преобразований, что

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n, \qquad (1)$$

где n — любое целое число. Условию

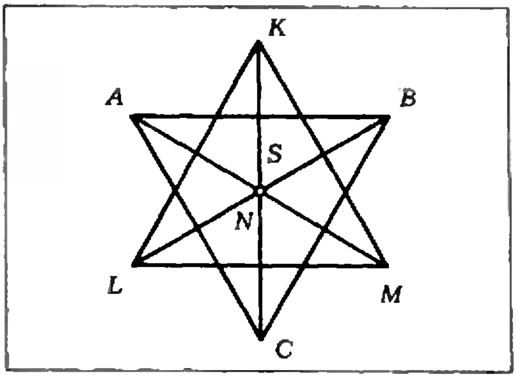


Рис. 1.

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ удовлетворяют лишь

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2},$$

получающиеся из (1) при $n = -1$ и $n = -2$ соответственно. Но $\cos x_1 < 0$, что не удовлетворяет условию.

2. $|a| \geqslant \sqrt{7}$ (иначе, $a \geqslant \sqrt{7}$, $a \leqslant -\sqrt{7}$). Указание. Решения первого неравенства $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 2$, второго $|x| \leqslant \frac{2}{7}a^2$. Условие выполнено, если $\frac{2}{7}a^2 \geqslant 2$.

3. $x = 2$; $\frac{487}{163} \leqslant x \leqslant 3$. Указание. Решения уравнения: $2 \leqslant x \leqslant 3$, решения неравенства: $x \leqslant 2$; $x \geqslant \frac{487}{163}$, причем $\frac{487}{163} < 3$.

4. $\frac{2}{15}v$; $2v$. Указание. Пусть объем второго резервуара равен x, объем третьего — y. Легко найти, что $x + y = \frac{32}{15}v$. Дальше надо провести перебор возможных случаев, учитывая, что $x \leqslant y$ и что 6 часов — время наполнения при *быстрейшем* способе подключения.

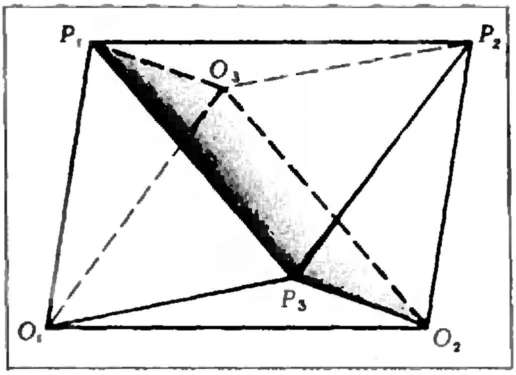


Рис. 2.

5. $V_{SABC} = 400$ *см*^{3}. Указание. Из условия следует: а) все грани пирамиды равны; б) центр описанного около пирамиды шара совпадает с центром вписанного шара (см. «Квант», 1970, № 10, с. 42). Отсюда следует, что радиус вписанного шара равен 3 *см*. Соединив центр шара с вершинами пирамиды, разобьем данную пирамиду на четыре равновеликие пирамиды с высотой 3 *см* и площадью основания 100 *см*^{2}.

Вариант 2

1. $x = \frac{5\pi}{4} - 1$.

2. $|a| \leqslant \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

3. $x = -2$; $x \geqslant \frac{557}{139}$.

4. 3500 *т*; 4800 *т*.

5. $\sqrt{\frac{61}{2}}$.

Указание. Из условия задачи следует: а) все грани пирамиды равны; б) проекция пирамиды на плоскость, параллельную ребрам AS и BC — прямоугольник. С помощью б) легко доказать, что отрезок, соединяющий середины ребер AS и BC, перпендикулярен к этим ребрам.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x = \frac{l\rho_0(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_2(\rho_1 - \rho_0)} = 3{,}1$ *см* (ρ_0 — плотность воды).

2. $\Delta l = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = 5$ *см*.

3. $\Delta t = \frac{v_0^2}{2c}\frac{Mm}{(M+m)^2} = 3{,}3\,^\circ C$.

4. $\mu = \frac{h}{l-h}\mu_{H_2} = 4$.

5. $q_4 = q_5 = \frac{uC_1C_4}{C_1 + C_4} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$ *к*.

6. $F = IBl = \frac{vB^2l^2}{R} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ *н*.

7. $R = \frac{2dm}{m^2 - 1} = 20$ *см*.

Физический факультет

1. Если кинетическая энергия корабля больше его потенциальной энергии, то корабль улетит. При $v_1 = 6$ *км/с* корабль улетит, при $v_2 = 5$ *км/с* и $v_1 = 4$ *км/с* — упадет на Землю.

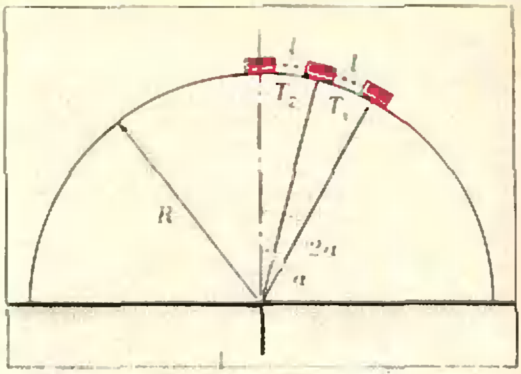


Рис. 3.

2. Так как $l \ll R$ (рис. 3), то

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{l}{R}, \quad 2\alpha = \frac{2l}{R}, \quad \cos 2\alpha \approx 1.$$

а) $a = g\alpha = g\frac{l}{R}$, б) $k \geqslant \alpha = \frac{l}{R}$.

3. $h = \frac{p_0}{\rho g} = 10$ *м*.

4. Записав закон сохранения энергии и закон сохранения количества движения для соударения шайб 3 и 2, а затем для соударения шайб 3 и 1, можно найти:

$$v_1 = -\frac{6}{25}v; \quad v_2 = \frac{2}{5}v; \quad v_3 = \frac{9}{25}v.$$

5. $\Delta l = 2l_0\frac{T_2 - nT_1}{nT_1}$.

6. $p_x = \frac{p_0T_1}{T_0}\left(1 + \frac{V_0}{V}\right) = 1{,}8$ *ат*.

7. Ускорение зарядов определяется силой, действующей на них со стороны поля, и силой Кулона. Из уравнений движения для каждого заряда получим

$$d = \sqrt{\frac{(M+m)qQ}{4\pi\varepsilon_0E(mQ + Mq)}}.$$

8. Ток на участке AB не должен изменяться, поэтому $E_x = \frac{(E_2 - E_1)R_3}{R_1 + R_2}$.

9. Так как изображения источника S' и S'' (рис. 4) находятся за зеркалом на одинаковом расстоянии, равном расстоянию от источника до зеркала, то точки S, S' и S'' лежат на одной окружности радиуса r с центром в точке A. Все углы малы, поэтому дуги можно заменить хордами. Тогда $P_1P_2 = r \cdot 2\alpha = L \cdot 2\omega$ (см. рис. 4),

$$2\omega = \frac{2l}{L+r}, \quad 2\varphi = \frac{2l}{r}, \quad 2\alpha = 2\varphi\frac{L}{L+r}.$$

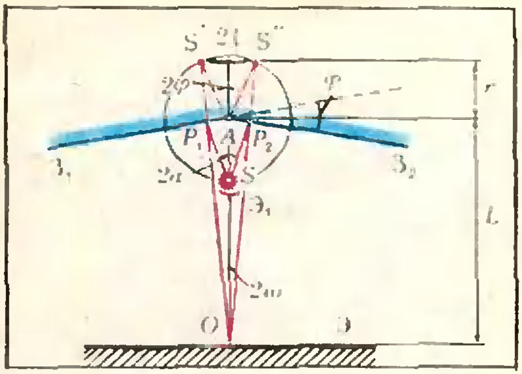


Рис. 4.

10. Построим изображение предмета в плоском и сферическом зеркалах (рис. 5):

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}=N=1{,}8,\quad \operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y_1}{2a},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{y_2}{a+b},\quad \frac{y_2}{y_1}=\frac{y_2}{y_0}=\frac{b}{a}.$$

Из этих уравнений получаем $b=9a$. Но

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{2}{R}.$$

Отсюда

$$R=\frac{9a^2\cdot 2}{8a}=54\ см.$$

11. При переходе световой волны из одной среды в другую частота ν сохраняется, а длина волны λ и скорость распространения света изменяются: $\lambda_0=\frac{c}{\nu}$, $\lambda_1=\frac{v}{\nu}=\frac{c}{n\nu}$ (n — показатель преломления стекла). Отсюда $n=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}=1{,}43$.

Угол падения φ и угол преломления ψ связаны соотношением $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=n$. По условию $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi=n=1{,}43,\qquad \varphi=54°30'.$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(См. «Квант», 1975, № 4)

1. Митя купил чешские марки, Толя и Петя — советские, Саша — болгарские.

2. Чтобы «прорвать» поверхность воды, надо преодолеть силу поверхностного натяжения. Давление много больше, когда ныряльщик «входит» в воду головой (площадь поверхности меньше).

3. У к а з а н и е. Воспользовавшись признаками деления числа на 9 и на 5, показать, что достаточно рассмотреть набор чисел (1, 2, ..., 10).

4. Вода в сосуде остынет быстрее, если лед лежит сверху на крышке.

5. 12 лет.

Итоги турнира

(см. «Квант», 1975, № 3, 2-я с. обл.)

1) Начнем с позиции из партии № 2 — № 1. Белые могут в пять ходов съесть пешку a7, но если они действуют прямолинейно, то партия заканчивается вничью: 1. Кре7 Крс3 2. Крd7 Крd4 3. Крс7 Крd5 4. Крb7 Крd6 5. Кр:а7 Крс7! и белый король в капкане. В распоряжении белого короля имеется 30 маршрутов, заканчивающихся взятием пешки, но лишь один из них ведет к победе! **1. Кре6! Крс3 2. Крd5!** Белый король, как говорят шахматисты, «отталкивает плечом» своего оппонента **2...Крd3** (вынужденная потеря темпа) **3. Крс6 Крd4 4. Крb7 Крd5 5. Кр:а7 Крс6 6. Крb8** и т. д. Эту партию № 2 выиграл благодаря тому, что был лучше знаком с геометрией шахматной доски.

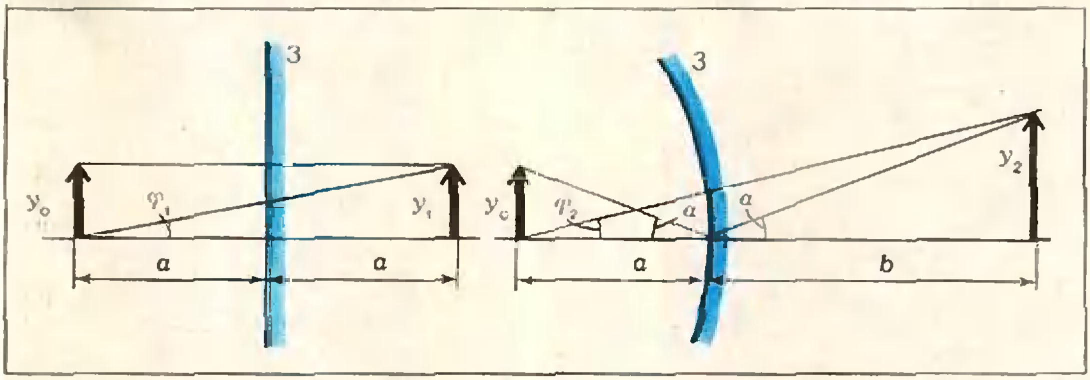


Рис. 5.

2) В партии № 3 — № 2 возникла удивительная позиция, в которой одна белая пешка справляется со всей армией неприятельских фигур. **1. Кр:d1 Фh1** (выбора нет) **2. a3!!** Почему не 2.a4? Хитрость раскроется позднее. **2...Фh2 3. a4 Фh1 4. a5 Фh2 5. a6 Фh1 6. a7 Фh2 7.a8 К!!** Теперь конь съедает обе пешки «f», а затем берет ладью g3 с матом (в этот момент черный ферзь стоит на h1). Итак, при ферзе на белом поле h1 конь объявляет мат с черного поля g3. Поскольку в данном окончании ферзь на каждом ходу меняет цвет поля, а конь всегда обладает этим свойством (см. по этому поводу «Квант», 1971, № 9), то и в момент появления коня поля, на которых стоят ферзь и конь, должны иметь разные цвета. Вот почему на первом ходу белые двинули пешку всего на одно поле!

3) Как мы видим, судьба турнира решалась в партии № 1 — № 3. Имея лишнюю пешку, белые не сомневались в победе. Однако партия, к их удивлению, вскоре закончилась вничью. Возможно, если бы № 1 знал о существовании математического «правила пяти», то он не пошел бы на данную позицию, а предпочел другой план. Для подобных ладейных окончаний с отрезанным королем слабейшей стороны «правило пяти» заключается в следующем. Если номер горизонтали, на которой находится пешка, и число вертикалей, отделяющих ее от неприятельского короля, в сумме не превосходят пяти, то партия заканчивается вничью. Если эта сумма больше пяти, то спасения нет. В нашем случае указанная сумма равна 5, позиция ничейная!

178	268	358	448	538	628	718	888
187	277	367	457	547	637	727	817
116	286	376	466	556	646	736	826
125	215	385	475	565	655	745	835
134	224	314	484	574	664	754	844
143	233	323	413	583	673	763	853
152	242	332	422	512	682	772	862
161	251	341	431	521	611	781	871

Рис. 6.

Итак, результаты турнира таковы: первое место заслуженно занял математик № 3 (он лучше освоил математические свойства шахматной доски), на втором месте № 2 и на третьем № 1.

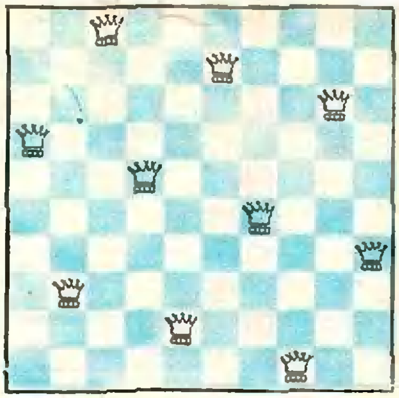


Рис. 7.

К статье «Математические игры на шахматной доске»

(см. «Квант», 1975, № 4)

1. Белые проигрывают (а в поддавки — выигрывают) независимо от очереди хода.

а) **1. d8K!**, и этот конь быстро приносит себя в жертву;

б) на любой ход черного коня следует d8С!, и слон вскоре становится под удар коня.

2. **1. Крe4! Фd8!** (иначе белый король уже на втором ходу встанет под бой) **2. Крd4!**, и следующим ходом король кончает самоубийством.

4. В таблице на рисунке 6 первая и третья цифры на полях — номера вертикалей и горизонталей, проходящих через них, вторая цифра — номер диагонали, параллельной линии h1 — a8. Если ферзи не угрожают друг другу, то на восьми полях, занятых ими, все левые цифры различны и, значит, образуют полный набор чисел 1, 2, ..., 8. То же самое касается вторых и третьих цифр. Из этого следует, что сумма всех 24 цифр, записанных на полях с ферзями, равна $(1+2+...+8)\cdot 3=108$. Из рисунка видно, что сумма цифр каждого поля делится на 8, то есть найденная сумма также должна делиться на 8. Однако 108 на 8 не делится — противоречие!

5. Одна из расстановок показана на рисунке 7 (вместо магараджей здесь изображены обычные ферзи). Заметим, что всего существует 4 искомые расстановки, остальные три получаются из данной при помощи двух поворотов доски, а также одного отражения.

Корректор Е. В. Сидоркина

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/II 1975 г. Подписано в печать 1/IV 1975 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50. Уч.-изд. л. 7,24. Тираж 368 680 экз.
Т-06531 Цена 30 коп. Заказ 276

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

XXX лет победы над гитлеровским фашизмом

В мае 1945 г. победоносно закончилась Великая Отечественная война советского народа против гитлеровской Германии.
Ценой 20 миллионов жизней наш народ не только отстоял завоевания Великого Октября, но и освободил народы Европы от фашизма.

В нашей стране выпущено около трехсот марок и блоков, рассказывающих о подвиге советского народа в Великой Отечественной войне. Часть из них вышла в годы войны. Они были посвящены героическим подвигам наших воинов, партизан и тех, кто самоотверженным трудом в тылу создавал оружие и снабжал фронт всем необходимым. Однако бо́льшая часть таких марок была выпущена уже после окончания войны. Они выпускались к различным юбилейным датам. Некоторые из этих марок мы воспроизводим на приведенных здесь фотографиях.

Вверху вы видите марку с известным плакатом военных лет художника И. Тоидзе «Родина-мать зовет», призывающим вступать в народное ополчение.
Крупные военные поражения потерпели гитлеровские войска в битвах под Москвой, под Сталинградом и под Орлом и Курском.

Мы воспроизводим здесь марки, выпущенные к 25-летию разгрома гитлеровских полчищ под Москвой и 20-летию победы наших войск под Сталинградом и на Курской дуге. Здесь же приведена марка, посвященная одной из наиболее крупных операций заключительного этапа войны — операции «Багратион», в результате которой была освобождена Белоруссия и наши войска вышли к границам Восточной Пруссии. На марке изображен памятник: четыре штыка, символизирующие четыре фронта, в результате совместных действий которых была проведена операция. На заднем плане — карта с изображением направлений главных ударов советских войск.
На фото также приведена марка, выпущенная в декабре 1967 г., с изображением памятника Неизвестному солдату — памятника всем павшим в Великой Отечественной войне. 8 мая 1967 года, в канун праздника Победы на могиле Неизвестного солдата был зажжен Вечный огонь славы от факела, доставленного из Ленинграда с Марсова поля, где похоронены борцы Великого Октября.

А. В. Алтыкис

Цена 30 коп.
Индекс 70465

5

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не увлеклись физикой или математикой, но хотели бы получше познакомиться с этими науками.

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. В 1975 году на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ.

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт.

В 1975 году «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников. Объем этих публикаций будет существенно расширен.

«Квант» полезен также и преподавателям. Материалы, публикуемые в «Кванте», могут быть использованы на занятиях математических и физических кружков и на факультативных занятиях.

Читайте в «Кванте» в 1975 г.:

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести над моделями как физического, так и математического происхождения.

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе. Так, в статьях А. Г. Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник Кванта» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике. В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел. Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах. Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач.

Для поступающих в вузы в 1975 году будут опубликованы статьи на следующие темы. Математика: тождественные преобразования иррациональных уравнений; проверка решений; уравнения с параметрами; доказательство неравенств; использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств; решение тригонометрических уравнений; решение задач на тела вращения; прямоугольная проекция при решении стереометрических задач; «скрытые» данные в условии задачи.

Физика: законы идеальных газов; электрический ток, линии передач; трансформаторы; построение изображений (пластинка, линза, зеркало); оптические приборы; глаз; интерференция.

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес, рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т. д.

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, на почтамтах. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.